بسمه تعالی

امتحان پایان ترم

۸۴/۱۰/۱۹

جبر پیشرفته
۶۱۰۳-۱۸۴
نیمسال اول ۸۵-۸۴

دانشگاه صنعتی شریف
جبر ۳
+۲۲-۲۱۹
نیمسال اول ۸۵-۸۴

در این امتحان منظور از حلقه، حلقه‌ای یکدار است و همواره $1\neq 0$.

سؤال ۱. فرض کنید R حلقه و E، R-مدولی باشد که توسیع اساسی سره ندارد. ثابت کنید E انژکتیو است.

سؤال ۲. صورت قضیه اندرسون را بنویسید و آنرا ثابت کنید.

سؤال ۳. صورت قضیه پایه هیلبرت را بنویسید و آنرا ثابت کنید.

سؤال ۴. صورت قضیه آرتین-ودربورن را بنویسید و آنرا ثابت کنید.

سؤال ۵. فرض کنید R حلقه و P، R-مدول چپ متناهی مولد و پروژکتیو باشد. ثابت کنید $\mathrm{Hom}_R(P,R)$، R-مدول راست پروژکتیو است.

سؤال ۶. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد، M، R-مدول متناهی مولد که با k عضو تولید می‌شود و N R-مدولی با طول متناهی. ثابت کنید $l(M\otimes_R N)\leq k\,l(N)$ (منظور از $l(-)$، طول $-$ می‌باشد).
(راهنمایی: برای اثبات مسأله، این حکم را دانسته فرض کنید: اگر $0\longrightarrow S\longrightarrow T\longrightarrow U\longrightarrow 0$ دنباله دقیق کوتاه از R-مدول‌ها و R-هم‌ریختی‌ها باشد آنگاه $l(T)=l(S)+l(U)$.)

سؤال ۷. فرض کنید R حلقه و M، R-مدول باشد و $0\neq x\in M$. ثابت کنید R-مدولی ساده مثل N و R-هم‌ریختی‌ای مثل $\varphi: M\longrightarrow E(N)$ موجود است که $\varphi(x)\neq 0$.

سؤال ۸. فرض کنید R حلقه‌ای ابتدایی چپ باشد. اگر به ازای هر دو عضو از R مثل a و b داشته باشیم $a(ab-ba)=(ab-ba)a$، ثابت کنید R حلقه تقسیم است.
(راهنمایی: برای اثبات مسأله، بایستی نشان دهید حلقه تقسیم مناسبی مثل D و D-فضای برداری چپ مناسبی مثل V موجود است که $\dim_D V=1$. اگر u و v دو عضو مستقل خطی از V باشند به مجموعه‌های $\{u,0\}$ و $\{0,u\}$ توجه کنید و از قضیه چگالی جیکوبسن استفاده کنید.)

توزیع نمره. هر سؤال ۱۰ نمره دارد.

مجموع: ۸۰ نمره.