بسمه تعالی

۸۴/۱۰/۱۹

دانشگاه صنعتی شریف

حل مسایل امتحان پایان ترم جبر ۳ (جبر پیشرفته)

سؤال ۵. چون R، $(R-R)$-دومدول است، بنابر قضیهٔ خوانده شده برای R-مدول چپ $-$، $\mathrm{Hom}_R(-,R)$ ساختار R-مدول راست دارد. می‌دانیم R-مدول آزاد F موجود است که $0\to\ker\varphi\xhookrightarrow{j}F\xrightarrow{\varphi}P\to 0$ یک دنبالهٔ دقیق کوتاه از R-همریختی‌ها است. چون P متناهی مولد است می‌توانیم فرض کنیم $F=\bigsqcup_{\text{متناهی}}R$. امّا P پروژکتیو است، لذا دنبالهٔ دقیق کوتاه بالا شکافته می‌شود و در نتیجه دنبالهٔ زیر نیز دنباله‌ای دقیق و کوتاه از R-همریختی‌ها خواهد بود که شکافته می‌شود:

$$0\to\mathrm{Hom}_R(P,R)\to\mathrm{Hom}_R(F,R)\to\mathrm{Hom}_R(\ker\varphi,R)\to 0.$$

در نتیجه $\mathrm{Hom}_R(F,R)\underset{R}{\cong}\mathrm{Hom}_R(P,R)\sqcup\mathrm{Hom}_R(\ker\varphi,R)$. امّا

$$\mathrm{Hom}_R(F,R)\underset{R}{\cong}\mathrm{Hom}_R\Big(\bigsqcup_{\text{متناهی}}R,R\Big)\underset{R}{\cong}\bigsqcup_{\text{متناهی}}\mathrm{Hom}_R(R,R)\underset{R}{\cong}\bigsqcup_{\text{متناهی}}R,$$

در نتیجه $\mathrm{Hom}_R(F,R)$ آزاد است. لذا بنابر قضیهٔ خوانده شده $\mathrm{Hom}_R(P,R)$ پروژکتیو خواهد بود. □

سؤال ۶. بنابر قضیهٔ خوانده شده، R-مدول آزاد F موجود است که $F\to M\to 0$ یک دنبالهٔ دقیق است. چون M متناهی مولد است و با k عضو تولید می‌شود می‌توانیم فرض کنیم $F=\bigsqcup_1^k R$. چون $-\underset{R}{\otimes}N$ تابعگون دقیق راست است، $F\underset{R}{\otimes}N\to M\underset{R}{\otimes}N\to 0$ دنباله‌ای دقیق از R-همریختی‌ها خواهد بود و لذا بنابر حکم داده شده در راهنمایی مسأله به دست می‌آوریم $\ell(M\underset{R}{\otimes}N)\leqslant\ell(F\underset{R}{\otimes}N)$. از طرفی داریم:

$$F\underset{R}{\otimes}N\underset{R}{\cong}\Big(\bigsqcup_1^k R\Big)\underset{R}{\otimes}N\underset{R}{\cong}\bigsqcup_1^k(R\underset{R}{\otimes}N)\underset{R}{\cong}\bigsqcup_1^k N.$$

پس $\ell(M\underset{R}{\otimes}N)\leqslant\ell\big(\bigsqcup_1^k N\big)$. امّا $0\to N\to N\sqcup N\to N\to 0$ دنبالهٔ دقیق کوتاه از R-همریختی‌ها است و مجدداً حکم داده شده در راهنمایی مسأله ایجاب می‌کند $\ell(N\sqcup N)=2\ell(N)$ و یک استقرای ساده نشان می‌دهد $\ell\big(\bigsqcup_1^k N\big)=k\ell(N)$. در نتیجه $\ell(M\underset{R}{\otimes}N)\leqslant k\ell(N)$. □

سؤال ۷. چون $x\neq 0$، پس $\mathrm{Ann}(x)$ ایده‌آل چپ سره‌ای از R می‌باشد و لذا ایده‌آل چپ ماکسیمال $\underline{m}$ از R موجود است که $\mathrm{Ann}(x)\subseteq\underline{m}$. قرار می‌دهیم $N=R/\underline{m}$. در این صورت N یک R-مدول ساده است. اکنون $\psi:Rx\to E(N)$ را با ضابطهٔ $\psi(rx)=r+\underline{m}$ تعریف می‌کنیم. چون $rx=r'x$ نتیجه می‌دهد که $r-r'\in\mathrm{Ann}(x)\subseteq\underline{m}$، لذا $r+\underline{m}=r'+\underline{m}$ که نشان می‌دهد ψ خوش‌تعریف است. واضح است که ψ یک R-همریختی می‌باشد. در نتیجه نمودار زیر از R-همریختی‌ها که سطر آن دنباله‌ای دقیق به دست می‌آید:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Rx \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "\psi"] & M \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ & E(N) & \end{tikzcd}$$

اکنون انژکتیو بودن $E(N)$ نتیجه می‌دهد که R-همریختی $\varphi:M\to E(N)$ موجود است که نمودار بالا را جابه‌جایی می‌کند، یعنی $\varphi j=\psi$. برای این R-همریختی داریم: $\varphi(x)=\varphi(j(x))=\psi(x)=1+\underline{m}\neq 0$. □

سؤال ۸. چون R حلقهٔ ابتدایی چپ است، بنابر قضیهٔ چگالی جکوبسن، حلقهٔ تقسیم D و D-فضای برداری چپ V موجود است که R با زیرحلقه‌ای از $\mathrm{End}_D(V)$ که در $\mathrm{End}_D(V)$ چگال است یکریخت می‌باشد. می‌توانیم برای راحتی R را زیرحلقه‌ای از $\mathrm{End}_D(V)$ بگیریم که در $\mathrm{End}_D(V)$ چگال است. فرض کنید u و v دو عضو از V باشند که D-مستقل خطی هستند. چون R در $\mathrm{End}_D(V)$ چگال است پس $a\in R$ موجود است که $a(u)=u$ و $a(v)=0$ و نیز $b\in R$ موجود است که $b(u)=0$ و $b(v)=u$. در نتیجه $a(ab-ba)(v)=u$ و $(ab-ba)a(v)=0$ و لذا $u=0$ که تناقض با D-مستقل خطی بودن u و v دارد. پس $\dim_D V=1$ و لذا $V\underset{D}{\cong}D$ که ایجاب می‌کند $\mathrm{End}_D(V)\cong\mathrm{End}_D(D)$. امّا V روی D با بُعد متناهی است و لذا تنها زیرحلقه‌ای از $\mathrm{End}_D(V)$ که در $\mathrm{End}_D(V)$ چگال است خودش می‌باشد، پس $R=\mathrm{End}_D(V)$. از طرفی می‌دانیم $\mathrm{End}_D(D)\cong D^{\circ}$. در نتیجه $R\cong D^{\circ}$ که نشان می‌دهد R حلقهٔ تقسیم است. □