

مدت امتحان: ۳ ساعت

پنجشنبه ۸۴/۸/۲۶

امتحان میان‌ترم ریاضی مهندسی

۲۲-۰۳۵ (گروه‌های ۵ تا ۸)

نیمسال اول ۸۴-۸۵

سؤال ۱. فرض کنید $0 < a < \pi$ یک عدد حقیقی ثابت باشد. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را که متناوب با دوره تناوب 2π است به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : -a \leq x \leq a, \\ 0 & : a < |x| \leq \pi. \end{cases}$$

الف) سری فوریه f را به دست آورید و سپس با استفاده از قضیه فوریه مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n}$ را محاسبه کنید.
ب) با استفاده از اتحاد پارسوال مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2}$ را محاسبه کنید.

سؤال ۲. فرض کنید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & : |x| \leq 1, \\ 0 & : |x| > 1. \end{cases}$$

انتگرال فوریه f را به دست آورید و سپس با استفاده از قضیه انتگرال فوریه مقدار انتگرال

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \right) \cos \frac{x}{4} dx$$

را محاسبه کنید.

سؤال ۳. جواب صوری مسأله مقدار مرزی زیر را به دست آورید و سپس نشان دهید که جواب صوری به دست آمده، جواب واقعی مسأله است.

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} & : 0 < x < 2, t > 0 \\ u(0, t) = 0 & : t \geq 0 \\ u(2, t) = 0 & : t \geq 0 \\ u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{4} & : 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

بیتقالی



دانشگاه صنعتی شریف

سؤال ۴. جواب صوری مسأله مقدار مرزی زیر را به دست آورید و سپس نشان دهید که جواب صوری به دست آمده، جواب واقعی مسأله است.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 6x & : 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x, 0) = x^2 + 3x + 3 \sin x & : 0 \leq x \leq \pi \\ u_t(x, 0) = 0 & : 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) = 0 & : t \geq 0 \\ u(\pi, t) = \pi^2 + 3\pi & : t \geq 0 \end{cases}$$

سؤال ۵. اگر تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : 0 < x < 1 \\ 0 & : \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تعریف شده باشد، مسأله مقدار مرزی زیر را حل کنید و سپس نشان دهید که جواب به دست آمده، جواب واقعی مسأله است.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & : -\infty < x < \infty, y > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & : -\infty < x < \infty \\ \text{وقتی که } y \rightarrow \infty \text{ تابع } u \text{ کراندار است.} \\ \text{وقتی که } |x| \rightarrow \infty \text{ داریم } u, u_x \rightarrow 0 \end{cases}$$

توزیع نمره: سؤال ۱: الف (۱۰ نمره، ب) ۵ نمره، سؤال ۲: ۱۵ نمره، سؤال ۳: ۲۰ نمره،
سؤال ۴: ۲۵ نمره، سؤال ۵: ۲۵ نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره.