بسمه تعالی

تاریخ ۸۴/۸/۲۶

شماره

پیوست

دانشگاه صنعتی شریف

حل مسایل امتحان میان ترم ریاضی مهندسی (گروه های ۵ تا ۸)

سؤال ۱: الف) چون f تابعی زوج است، ضرایب فوریهٔ f به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{a} dx = \frac{2a}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{a}\cos nx\,dx = \frac{2}{n\pi}\sin na \quad (n\geq 1),$$

$$b_n = 0 \quad (n\geq 1).$$

پس سری فوریهٔ f به صورت

$$\frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin na}{n}\cos nx$$

می باشد. چون f در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است، لذا بنابر قضیهٔ فوریه، سری فوریهٔ f در نقطهٔ $x=0$ به $f(0)=1$ همگراست. یعنی

$$\frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin na}{n} = 1$$

یا

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin na}{n} = \frac{\pi - a}{2}.$$

ب) بنابر اتحاد پارسوال، یعنی

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

به دست می آوریم

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{a} dx = \frac{1}{2}\left(\frac{4a^2}{\pi^2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\sin^2 na.$$

در نتیجه

$$\frac{2a}{\pi} = \frac{2a^2}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 na}{n^2}$$

که به دست می دهد

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 na}{n^2} = \frac{\pi a - a^2}{2}. \quad \square$$

سؤال ۲: چون f تابعی زوج است، پس

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{1}(1-x^2)\cos\omega x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{1}\cos\omega x\,dx - \frac{2}{\pi}\int_0^{1}x^2\cos\omega x\,dx = \frac{2}{\omega\pi}\sin\omega - \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega + \frac{2}{\omega^2}\cos\omega - \frac{2}{\omega^3}\sin\omega\right) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin\omega - \omega\cos\omega}{\omega^3}\right),$$

$$B(\omega) = 0.$$

پس انتگرال فوریهٔ f به صورت

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin\omega - \omega\cos\omega}{\omega^3}\right)\cos\omega x\,d\omega$$

می باشد. چون f در نقطهٔ $x=\frac{1}{2}$ پیوسته است، لذا بنابر قضیهٔ انتگرال فوریه، انتگرال فوریهٔ f در نقطهٔ $x=\frac{1}{2}$ برابر $f(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$ است. یعنی

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin\omega - \omega\cos\omega}{\omega^3}\right)\cos\frac{\omega}{2}\,d\omega = \frac{3}{4}$$

یا

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin\omega - \omega\cos\omega}{\omega^3}\right)\cos\frac{\omega}{2}\,d\omega = \frac{3\pi}{16}$$

و لذا مقدار انتگرال مطلوب برابر با $\frac{3\pi}{16}$ است. $\square$

سؤال ۳: فرض کنید جواب به صورت $u(x,t)=X(x)T(t)$ باشد. از معادلهٔ اول به دست می آوریم $XT' = 4X''T$، یا $\frac{X''}{X} = \frac{T'}{4T}$. چون طرف چپ این تساوی تابعی از x و طرف راست آن تابعی از t است پس بایستی

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{4T} = \text{ثابت}\ (\text{مثلاً} = \lambda).$$

در نتیجه با استفاده از شرایط دوم و سوم به دستگاه

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(2) = 0 \end{cases}$$

و نیز معادلهٔ

$$T' - 4\lambda T = 0$$

می رسیم. برای $\lambda \geq 0$، دستگاه بالا جواب $X(x)=0$ را به دست می دهد که منجر به جواب $u(x,t)=0$ برای مسألهٔ

اصلی می‌شود که به دلیل شرط چهارم غیر قابل قبول است. پس می‌توانیم فرض کنیم $\lambda<0$. در این صورت جواب

$$X(x)=A\cos\sqrt{-\lambda}\,x+B\sin\sqrt{-\lambda}\,x$$

برای معادلهٔ دستگاه بالا به وجود می‌آید که با توجه به شرط‌های $X(0)=X(2)=0$ به دست می‌آوریم $A=0$ و $B\sin 2\sqrt{-\lambda}=0$. بایستی فرض کنیم $B\neq 0$، زیرا در غیر این صورت مجدداً جواب غیر قابل قبول $u(x,t)=0$ به دست می‌آید. امّا با فرض $B\neq 0$ به دست می‌آوریم $\sin 2\sqrt{-\lambda}=0$ یا $\lambda=-\frac{n^2\pi^2}{4}$ برای $n\in\mathbb{N}$. پس هرکدام از این λها به شکل بالا جواب غیربدیهی قابل قبول به وجود می‌آورد و بقیهٔ λهای منفی مجدداً جواب بدیهی غیر قابل قبول. پس با قرار دادن $\lambda_n=-\frac{n^2\pi^2}{4}$، $n\in\mathbb{N}$، جواب‌های غیربدیهی

$$X_n(x)=B_n\sin\frac{n\pi}{2}x$$

برای دستگاه بالا به وجود می‌آید که جواب متناظر معادلهٔ برحسب T، به صورت

$$T_n(t)=C_n e^{-n^2\pi^2 t}$$

خواهد بود و لذا جواب

$$u_n(x,t)=b_n e^{-n^2\pi^2 t}\sin\frac{n\pi}{2}x$$

برای مسألهٔ اصلی که در سه شرط اوّل نیز صادق است به دست می‌آید. بدیهی است که

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2 t}\sin\frac{n\pi}{2}x$$

نیز جوابی برای مسألهٔ اصلی است که در سه شرط اوّل صدق می‌کند. اکنون b_nها را طوری پیدا می‌کنیم که این جواب در شرط آخر نیز صدق کند، یعنی داشته باشیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi}{2}x=\sin\frac{\pi x}{2}.$$

پس b_nها می‌توانند به صورت زیر باشند:

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2\sin\frac{\pi x}{2}\sin\frac{n\pi}{2}x\,dx=\begin{cases}1 & : n=1,\\ 0 & : n>1.\end{cases}$$

در نتیجه $u(x,t)=e^{-\pi^2 t}\sin\frac{\pi}{2}x$ جواب صوری مسألهٔ مورد نظر است. به راحتی دیده می‌شود که این جواب در تمام شرایط مسأله صادق است و لذا جواب واقعی مسأله می‌باشد.

جواب مسأله: $\boxed{u(x,t)=e^{-\pi^2 t}\sin\frac{\pi}{2}x}$ $\square$

سؤال ۴: فرض کنید جواب به صورت $u(x,t)=v(x,t)+U(x)$ باشد. در نتیجه مسألهٔ داده شده به مسألهٔ زیر منجر می‌شود:

$$\begin{cases} v_{tt}=v_{xx}+U''-6x & : 0<x<\pi,\ t>0\\ v(x,0)+U(x)=x^3+3x+3\sin x & : 0\leqslant x\leqslant \pi\\ v_t(x,0)=0 & : 0\leqslant x\leqslant\pi\\ v(0,t)+U(0)=0 & : t\geqslant 0\\ v(\pi,t)+U(\pi)=\pi^3+3\pi & : t\geqslant 0\end{cases}$$

حال U را طوری پیدا می‌کنیم که

$$\begin{cases} U''-6x=0,\\ U(0)=0,\\ U(\pi)=\pi^3+3\pi.\end{cases}$$

به راحتی دیده می‌شود که جواب این دستگاه $U(x)=x^3+3x$ است. پس با فرض اینکه جواب مسألهٔ اصلی به صورت

$$u(x,t)=v(x,t)+x^3+3x$$

باشد، مسألهٔ داده شده به مسألهٔ زیر منجر می‌شود:

$$\begin{cases} v_{tt}=v_{xx} & : 0<x<\pi,\ t>0\\ v(x,0)=3\sin x & : 0\leqslant x\leqslant\pi\\ v_t(x,0)=0 & : 0\leqslant x\leqslant\pi\\ v(0,t)=0 & : t\geqslant 0\\ v(\pi,t)=0 & : t\geqslant 0\end{cases}$$

اکنون فرض کنید جواب به صورت $v(x,t)=X(x)T(t)$ باشد. از معادلهٔ اوّل به دست می‌آوریم $XT''=X''T$، یا $\frac{X''}{X}=\frac{T''}{T}$.
چون طرف چپ این تساوی تابعی از x و طرف راست آن تابعی از t است پس بایستی $\frac{X''}{X}=\frac{T''}{T}=$ ثابت (λ مثلاً).
در نتیجه با استفاده از شرایط سوم، چهارم و پنجم به دو دستگاه

$$\begin{cases} X''-\lambda X=0 \\ X(0)=X(\pi)=0\end{cases},\qquad \begin{cases}T''-\lambda T=0\\ T'(0)=0\end{cases}$$

می‌رسیم. برای $\lambda\geq 0$، دستگاه اوّل جواب $X(x)=0$ را به دست می‌دهد که منجر به جواب $v(x,t)=0$ برای مسألهٔ دوم می‌شود که به دلیل شرط دوم غیر قابل قبول است. پس می‌توانیم فرض کنیم $\lambda<0$. در این صورت جواب

$$X(x)=A\cos\sqrt{-\lambda}\,x+B\sin\sqrt{-\lambda}\,x$$

برای معادلهٔ دستگاه اوّل به وجود می‌آید که با توجه به شرط‌های $X(0)=X(\pi)=0$ به دست می‌آوریم $A=0$ و $B\sin\pi\sqrt{-\lambda}=0$. بایستی فرض کنیم $B\neq 0$، زیرا در غیر این صورت مجدداً جواب غیر قابل قبول $v(x,t)=0$ به دست می‌آید. امّا با فرض $B\neq 0$ به دست می‌آوریم $\sin\pi\sqrt{-\lambda}=0$ یا $\lambda=-n^2$ برای $n\in\mathbb{N}$. پس هرکدام از این λها به شکل بالا جواب غیربدیهی قابل قبول به وجود می‌آورد و بقیهٔ λهای منفی مجدداً جواب بدیهی غیرقابل قبول. پس با قرار دادن $\lambda_n=-n^2$، $n\in\mathbb{N}$، جواب‌های غیر بدیهی

$$X_n(x)=B_n\sin nx$$

برای دستگاه اوّل به وجود می‌آید که جواب متناظر دستگاه برحسب T، به صورت

$$T_n(t)=C_n\cos nt$$

خواهد بود ولذا جواب

$$v_n(x,t)=b_n\cos nt\sin nx$$

برای مسألهٔ دوم که در شرط‌های سوم، چهارم و پنجم نیز صادق است به دست می‌آید. بدیهی است که

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\cos nt\sin nx$$

نیز جوابی برای مسألهٔ دوم است که در شرط‌های مذکور صادق است. اکنون b_nها را طوری پیدا می‌کنیم که این جواب در شرط دوم نیز صدق کند، یعنی داشته باشیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx=3\sin x.$$

پس b_nها می‌توانند به صورت زیر باشند:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 3\sin x\sin nx\,dx=\begin{cases}3 & : n=1\\ 0 & : n>1.\end{cases}$$

در نتیجه $v(x,t)=3\cos t\sin x$ جواب صوری مسألهٔ دوم و لذا $u(x,t)=3\cos t\sin x+x^3+3x$ جواب صوری مسألهٔ اصلی خواهد بود. به راحتی دیده می‌شود که این جواب در تمام شرایط مسأله صادق است و لذا جواب واقعی مسأله می‌باشد.

جواب مسأله: $\boxed{u(x,t)=x^3+3x+3\cos t\sin x}$ □

سؤال ۵: فرض کنید $U(\omega,y)$ تبدیل فوریهٔ $u(x,y)$ نسبت به x باشد. با گرفتن تبدیل فوریه از معادلهٔ اوّل به دست می‌آوریم

$$\mathcal{F}(u_{xx})+\mathcal{F}(u_{yy})=0.$$

امّا داریم:

$$\mathcal{F}(u_{yy})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u_{yy}(x,y)\,e^{i\omega x}dx$$
$$=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y)\,e^{i\omega x}dx\right)$$
$$=\frac{\partial^2}{\partial y^2}U(\omega,y).$$

تاریخ ۸۴/۸/۲۶

شماره ....

پیوست ....

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

از طرفی با استفاده از شرط چهارم می‌توانیم بنویسیم

$$\mathcal{F}(u_{xx}) = -i\omega\,\mathcal{F}(u_x) = (-i\omega)^2\mathcal{F}(u) = -\omega^2 U(\omega,y).$$

لذا به معادلهٔ

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}U(\omega,y) - \omega^2 U(\omega,y) = 0$$

می‌رسیم که جوابی به صورت

$$U(\omega,y) = A(\omega)e^{\omega y} + B(\omega)e^{-\omega y}$$

دارد. چون با فرض $y \to \infty$ ، u تابعی کراندار است، لذا اگر $\omega>0$ فرض شود بایستی داشته باشیم $A(\omega)=0$ و اگر $\omega<0$ فرض شود بایستی داشته باشیم $B(\omega)=0$. لذا جواب به صورت $U(\omega,y)=U(\omega,0)e^{-|\omega|y}$ ساده می‌شود. امّا توجه می‌کنیم که

$$U(\omega,0) = \mathcal{F}(u(x,0)) = \mathcal{F}(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{i\omega\xi}\,d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{i\omega\xi}\,d\xi.$$

در نتیجه به دست می‌آوریم

$$U(\omega,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{i\omega\xi}\,d\xi\right)e^{-|\omega|y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{i\omega\xi-|\omega|y}\,d\xi.$$

پس بنابر قضیهٔ خوانده شده می‌توانیم بنویسیم:

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} U(\omega,y)\,e^{-i\omega x}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{i\omega\xi-|\omega|y}\,d\xi\right)e^{-i\omega x}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^1 e^{i\omega\xi-|\omega|y-i\omega x}\,d\xi\right)d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\iint_{(-\infty,\infty)\times(0,1)} e^{i\omega\xi-|\omega|y-i\omega x}\,dA$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^1\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\xi-|\omega|y-i\omega x}\,d\omega\right)d\xi$$

$$= \frac{y}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{(\xi-x)^2+y^2}\,d\xi$$

$$= \frac{y}{\pi}\left[\frac{1}{y}\tan^{-1}\left(\frac{\xi-x}{y}\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{y}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)\right).$$

به راحتی دیده می‌شود که این جواب در معادلهٔ اوّل صدق می‌کند.

جواب مسأله:

$$\boxed{u(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{y}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)\right) & : \quad y>0 \\ f(x) & : \quad y=0 \end{cases}}$$

$\square$