

مدت امتحان: ۳ ساعت

چهارشنبه ۸۴/۱۰/۲۸

امتحان پایان ترم ریاضی مهندسی

۰۳۵-۲۲ (گروه‌های ۵ تا ۸)

نیمسال اول ۸۵-۸۴

سؤال ۱. تابع  $f$  با ضابطه

$$f(z) = \frac{2z}{z^2 + 1}$$

مفروض است. الف)  $f$  را روی  $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - i| < 2\}$  به سری لوران حول نقطه  $i$  بسط دهید. مقدار  $\text{Res}(f, i)$  چیست؟ ب)  $f$  را روی  $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z + i| < 2\}$  به سری لوران حول نقطه  $-i$  بسط دهید. مقدار  $\text{Res}(f, -i)$  چیست؟ ج)  $f$  را روی  $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$  به سری لوران حول نقطه  $0$  بسط دهید. ضریب  $1/z$  در این بسط معرف چیست؟

سؤال ۲. مقدار انتگرال زیر را به ازای تمام خم‌های ژردان و قطعه‌به‌قطعه هموار  $C$  که انتگرال موجود است محاسبه کنید.

$$\int_C \frac{e^{1/z}}{(z-1)^2} dz$$

سؤال ۳. مقدار انتگرال حقیقی زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{10 - 6 \cos x}$$

سؤال ۴. اگر  $n \geq 2$  عددی صحیح باشد، مقدار انتگرال حقیقی زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n}$$

سؤال ۵. با فرض  $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Arg} z < \frac{\pi}{4}\}$ ، آیا تابع تام و غیرثابتی مانند  $f: \mathbb{C} \rightarrow D$  وجود دارد؟ چرا؟

سؤال ۶. تعداد جواب‌های معادله  $e^{iz} - z^2 = 2$  را در  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im} z > 0\}$  پیدا کنید. (راهنمایی: از قضیه روشه استفاده کنید که چنین حکم می‌کند: فرض کنید  $C$  خمی ژردان و قطعه‌به‌قطعه هموار باشد و  $f$  و  $g$  دو تابع که روی  $C$  و داخل آن تحلیلی هستند. اگر به ازای هر  $z$  روی خم  $C$ ،  $|g(z)| < |f(z)|$ ، آنگاه تعداد جواب‌های معادله‌های

$f(z) = 0$  و  $f(z) + g(z) = 0$  داخل  $C$  مساوی است.)

توزیع نمره: سؤال ۱: الف) ۱+۷ نمره، ب) ۱+۷ نمره، ج) ۲+۷ نمره و بقیه سؤال‌ها هر کدام ۱۵ نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره.