بسمه تعالی

حل مسایل امتحان پایان ترم ریاضی مهندسی (گروه های ۵ تا ۸)

سؤال ۱: الف) می توانیم بنویسیم:

$$f(z)=\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z+i}=\frac{1}{z-i}+\frac{1}{2i+(z-i)}=\frac{1}{z-i}+\frac{1}{2i}\times\frac{1}{1+(z-i)/2i}.$$

اما روی $\{z\in\mathbb{C}:\ 0<|z-i|<2\}$ داریم $0<\left|\frac{z-i}{2i}\right|<1$ ولذا

$$f(z)=\frac{1}{z-i}+\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2i}\right)^n(z-i)^n,$$

که سری طرف راست، سری لوران f حول نقطهٔ i در ناحیهٔ داده شده می باشد. درنتیجه $\operatorname{Res}(f,i)=1$.

ب) می توانیم بنویسیم:

$$f(z)=\frac{1}{z+i}+\frac{1}{z-i}=\frac{1}{z+i}-\frac{1}{2i-(z+i)}=\frac{1}{z+i}-\frac{1}{2i}\times\frac{1}{1-(z+i)/2i}.$$

اما روی $\{z\in\mathbb{C}:\ 0<|z+i|<2\}$ داریم $0<\left|\frac{z+i}{2i}\right|<1$ ولذا

$$f(z)=\frac{1}{z+i}-\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2i}\right)^n(z+i)^n,$$

که سری طرف راست، سری لوران f حول نقطهٔ $-i$ در ناحیهٔ داده شده می باشد. درنتیجه $\operatorname{Res}(f,-i)=1$.

ج) می توانیم بنویسیم:

$$f(z)=\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z+i}=\frac{1}{z}\times\frac{1}{1-i/z}+\frac{1}{z}\times\frac{1}{1+i/z}.$$

اما روی $\{z\in\mathbb{C}:\ 1<|z|<2\}$ داریم $\frac{1}{2}<\left|\frac{i}{z}\right|<1$ ولذا

$$f(z)=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{z}\right)^n+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{i}{z}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}i^n\left(1+(-1)^n\right)\frac{1}{z^{n+1}},$$

که سری طرف راست، سری لوران f حول نقطهٔ ۰ در ناحیهٔ داده شده می باشد. در اینجا ضریب $\frac{1}{z}$ که برابر با ۲ می باشد معرف مجموع مانده های f در i و $-i$ می باشد. □

سؤال ۲: تابع f با ضابطهٔ $f(z)=\frac{e^{1/z}}{(z-1)^2}$ در صفحهٔ مختلط دو نقطهٔ تکین منفرد دارد: $z_0=0$ و $z_1=1$. برای محاسبهٔ ماندهٔ f در $z_0=0$، f را در $0<|z|<1$ به سری لوران حول $z_0=0$ بسط می دهیم. برای این منظور می نویسیم:

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\quad;\quad 0<|z|<1$$

$$\frac{1}{(z-1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}\quad;\quad 0<|z|<1$$

$$e^{1/z}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}z^{-m}\quad;\quad 0<|z|<1$$

درنتیجه بسط f به سری لوران حول $z_0=0$ در $0<|z|<1$ به صورت زیر است:

$$f(z)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}z^{-m}\right).$$

درنتیجه ضریب $\frac{1}{z}$ که ماندهٔ f در $z_0=0$ است برابر است با

$$\operatorname{Res}(f,0)=1+\frac{2}{2!}+\frac{3}{3!}+\cdots=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots=e.$$

اما $z_1=1$ قطب مرتبهٔ ۲ی f است و ماندهٔ f در $z_1=1$ برابر است با

$$\operatorname{Res}(f,1)=\lim_{z\to1}\frac{d}{dz}(z-1)^2\frac{e^{1/z}}{(z-1)^2}=\lim_{z\to1}-\frac{1}{z^2}e^{1/z}=-e.$$

اگر C نقاط ۰ و ۱ را در برنداشته باشد حاصل انتگرال برابر صفر است،
اگر C فقط نقطهٔ ۰ را در برداشته باشد حاصل انتگرال برابر $2\pi ei$ است،
اگر C فقط نقطهٔ ۱ را در برداشته باشد حاصل انتگرال برابر $-2\pi ei$ است و
اگر C هردو نقطهٔ ۰ و ۱ را در برداشته باشد حاصل انتگرال برابر صفر است. □

سؤال ۳:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{10-6\cos x}=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{10-3(e^{ix}+e^{-ix})}$$

$$=\int_{|z|=1}\frac{1}{10-3(z+\frac{1}{z})}\times\frac{1}{iz}\,dz$$

$$=\int_{|z|=1}\frac{i}{3z^2-10z+3}\,dz=\int_{|z|=1}\frac{i}{(3z-1)(z-3)}\,dz$$

$$= 2\pi i \,\mathrm{Res}\left(\frac{i}{(3z-1)(z-3)}, \frac{1}{3}\right)$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to \frac{1}{3}} \left(z-\frac{1}{3}\right)\frac{i}{(3z-1)(z-3)} = 2\pi i \lim_{z\to \frac{1}{3}}\frac{i}{3z-9}$$

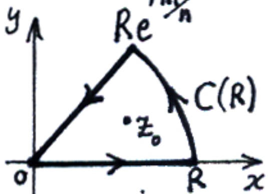
$$= 2\pi i\left(-\frac{i}{8}\right) = \frac{\pi}{4}. \quad \square$$

سؤال ۴: تابع f با ضابطهٔ $f(z)=\frac{1}{1+z^n}$ را در نظر می‌گیریم. $z_0=e^{\pi i/n}$ یکی از نقاط تکین منفرد f است که در واقع قطب ساده برای f محسوب می‌شود. برای محاسبهٔ ماندهٔ f در z_0 با استفاده از دستور هوپیتال می‌توانیم بنویسیم:

$$\mathrm{Res}(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{1}{1+z^n}=\frac{1}{n z_0^{n-1}}$$

$$=\frac{1}{n e^{(n-1)\pi i/n}}=\frac{-1}{n e^{-\pi i/n}}.$$

اکنون خم زیر را در نظر می‌گیریم که در آن R آنقدر بزرگ در نظر گرفته شده است که z_0 داخل خم قرار دارد.



کل خم: C

چون z_0 تنها نقطهٔ تکین منفرد f است که داخل خم قرار دارد، پس در نتیجه می‌توانیم بنویسیم $\int_C \frac{1}{1+z^n}\,dz = \frac{-2\pi i}{n e^{-\pi i/n}}$

$$\int_0^R \frac{dx}{1+x^n}+\int_{C(R)}\frac{1}{1+z^n}\,dz-\int_0^R\frac{e^{2\pi i/n}\,dx}{1+x^n}=\frac{-2\pi i}{n e^{-\pi i/n}}.$$

چون $\left|\int_{C(R)}\frac{1}{1+z^n}\,dz\right|\le\frac{\pi R}{R^n-1}$ و $n\ge 2$، در نتیجه $\lim_{R\to\infty}\int_{C(R)}\frac{1}{1+z^n}\,dz=0$ و لذا با فرض $R\to\infty$ به دست می‌آوریم

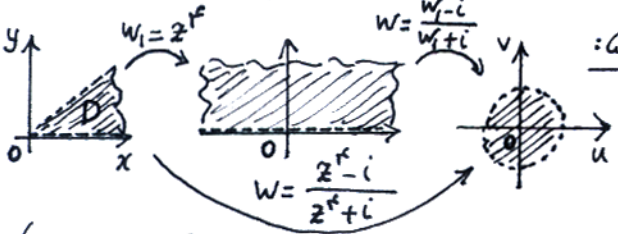
$$\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^n}-e^{2\pi i/n}\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^n}=\frac{-2\pi i}{n e^{-\pi i/n}},$$

یا

$$\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^n}=\frac{-2\pi i}{n e^{-\pi i/n}\left(1-e^{2\pi i/n}\right)}=\frac{-2\pi i}{n\left(e^{-\pi i/n}-e^{\pi i/n}\right)}$$

$$=\frac{-2\pi i}{n\left(-2i\sin\frac{\pi}{n}\right)}=\frac{\pi/n}{\sin\frac{\pi}{n}}. \quad \square$$

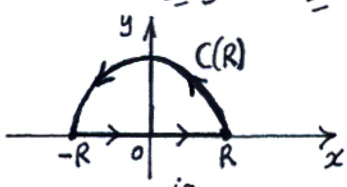
سؤال ۵:



فرض کنید تابعی تام مانند $f:\mathbb{C}\to D$ موجود باشد. با توجه به شکل‌های بالا تابع g با ضابطهٔ $g(z)=\frac{z^4-i}{z^4+i}$، D را به طور ۱-۱، پوشا و همدیس به داخل قرص باز واحد U می‌نگارد. پس $g\circ f:\mathbb{C}\to U$ تابعی تام و کراندار (چون تصویرش داخل U قرار دارد) است و لذا بنابر قضیهٔ لیوویل تابعی ثابت است. پس f نیز لزوماً تابعی ثابت خواهد شد. پس تابعی تام و غیرثابت مانند $f:\mathbb{C}\to D$ وجود ندارد. $\square$

سؤال ۶: خم زیر را در نظر بگیرید که در آن $R>\sqrt{3}$.

کل خم: C



قرار دهید $f(z)=z^2+2$ و $g(z)=-e^{iz}$. واضح است که f و g روی C و داخل آن تحلیلی هستند. فرض کنید $z\in C$ نقطه‌ای دلخواه باشد. اگر z روی قسمت افقی خم C باشد آنگاه $z=x$، $-R\le x\le R$ و داریم

$$|g(z)|=|-e^{ix}|=1<2\le|x^2+2|=|f(z)|.$$

اگر z روی $C(R)$ باشد، آنگاه $z=R\cos t+iR\sin t$، $0\le t\le\pi$ و داریم

$$|g(z)|=e^{-R\sin t}\le 1<R^2-2\le|z^2+2|=|f(z)|.$$

پس برای هر $z\in C$، $|g(z)|<|f(z)|$ و لذا بنابر قضیهٔ روشه تعداد جواب‌های معادله‌های $z^2+2=0$ و $e^{iz}-z^2=2$ داخل خم C مساوی است. اما معادلهٔ $z^2+2=0$ داخل C فقط یک جواب دارد، پس $e^{iz}-z^2=2$ نیز داخل C فقط یک جواب دارد. اما $R>\sqrt{3}$ دلخواه انتخاب شده بود، پس $e^{iz}-z^2=2$ فقط یک جواب در نیم‌صفحهٔ بالایی دارد. $\square$