بسمه تعالی

تاریخ ۸۵/۱/۳۱

شماره

پیوست

دانشگاه صنعتی شریف

حل مسایل امتحان میان‌ترم معادلات دیفرانسیل (گروه‌های ۱ تا ۱۲)

سؤال ۱: $\exp\left(\int_e^x \frac{d\xi}{\xi \ln \xi}\right) = \exp\left(\ln|\ln x|\right) = |\ln x|$ عامل انتگرال‌ساز معادله می‌باشد، لذا با ضرب طرفین معادله در $\ln x$ به دست می‌آوریم $y'\ln x + \frac{1}{x} y = 3x^2 \ln x$ یا $(y\ln x)' = (x^3)'\ln x$. انتگرال‌گیری از طرفین تساوی اخیر نتیجه می‌دهد که $y\ln x = x^3\ln x - \int x^2 dx$ یا $y \ln x = x^3 \ln x - \frac{1}{3}x^3 + C$ که در آن $C\in\mathbb{R}$ ثابت دلخواهی است. پس جواب عمومی معادله به صورت

$$y = x^3 + \left(C - \tfrac{1}{3} x^3\right)/\ln x$$

به دست می‌آید. □

سؤال ۲: با ضرب طرفین معادله در $-2y^{-3}e^{2x}$ به دست می‌آوریم $-2y^{-3}y'e^{2x} + 2y^{-2}e^{2x} = 2x$. تغییر متغیر $u = y^{-2}$ نتیجه می‌دهد $u' = -2y^{-3}y'$، لذا معادله به صورت $u'e^{2x} + 2ue^{2x} = 2x$ یا $(ue^{2x})' = 2x$ تبدیل می‌شود. انتگرال‌گیری از طرفین تساوی اخیر نتیجه می‌دهد که $ue^{2x} = x^2 + C$ که در آن $C\in\mathbb{R}$ ثابت دلخواهی است. در نتیجه $y^{-2}e^{2x} = x^2 + C$ یا $y^{-1}e^x = \pm\sqrt{x^2+C}$. پس جواب عمومی معادله به صورت

$$y = \pm e^x/\sqrt{x^2+C}$$

به دست می‌آید. □

سؤال ۳: فرض کنید $y: \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \to [-1, 1]$ تابع مشتق‌پذیر دلخواهی باشد که در معادلهٔ انتگرال داده شده صدق می‌کند. چون نمودار y در داخل مستطیل $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]\times[-1,1]$ قرار دارد، لذا خط $y + 2t + 3 = 0$ را قطع نمی‌کند و در نتیجه تابع زیر انتگرال تابعی پیوسته است. پس بنابر قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال به دست می‌آوریم

$$\frac{dy(x)}{dx} + \frac{y(x)+9}{y(x)+2x+3} = 0.$$

از طرفی لزوماً $y(0) = 0$. پس چنین y ی بایستی جواب مسألهٔ مقدار اولیهٔ زیر باشد که بنابر قضیهٔ وجود و یگانگی منحصربه‌فرد است.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y+9}{2x+y+3} \\ y(0)=0 \end{cases}$$

امّا معادلهٔ دیفرانسیل متناظر با مسألهٔ مقدار اولیهٔ بالا، یعنی $(y+9)\,dx + (2x+y+3)\,dy = 0$، مثال صفحهٔ ۴۷ کتاب درسی می‌باشد که با تغییر متغیرهای $u = x - 3$ و $v = 2x + y + 3$ حل می‌شود و برای آن جواب عمومی $(y+9)^2(3x+y) = C$ به دست می‌آید. شرط $y(0)=0$ ایجاب می‌کند که $C=0$ و لذا جواب منحصربه‌فرد سؤال در تساوی $(y+9)^2(3x+y) = 0$ صدق می‌کند و چون $y\neq -9$، لذا لزوماً $y = -3x$ جواب خواهد بود. پس یگانه تابع مشتق‌پذیر $y: \left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]\to[-1,1]$ که در معادلهٔ انتگرال داده شده صدق می‌کند $y=-3x$ است. □

سؤال ۴: معادلهٔ دیفرانسیل همگن متناظر با معادلهٔ دیفرانسیل داده شده $y'' + a^2 y = 0$ می‌باشد که معادلهٔ مشخصه‌ای به شکل $r^2 + a^2 = 0$ با ریشه‌های ia و $-ia$ دارد. پس جواب‌های مستقل خطی معادلهٔ دیفرانسیل همگن متناظر $\cos ax$ و $\sin ax$ می‌باشند. برای یافتن جواب خصوصی معادله نیز توجه می‌کنیم که اگر $a \neq \pm b$، آنگاه $y = k\cos bx + l\sin bx$ کاندیدی برای جواب است که با جایگذاری در معادله به دست می‌آید $k=0$ و $l = 1/(a^2-b^2)$. همچنین اگر $a = \pm b$، آنگاه کاندید مناسب برای جواب $y = x(k'\cos bx + l'\sin bx)$

است که مجدداً با جایگذاری در معادله به دست می‌آید $k'=-1/2b$ و $l'=0$. لذا جواب عمومی معادله به صورت زیر است که در آن $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ثابت های دلخواه هستند.

$$y = \begin{cases} c_1\cos ax + c_2\sin ax + \sin bx/(a^2-b^2) & : a\neq \pm b \\ c_1\cos ax + c_2\sin ax - x\cos bx/2b & : a=\pm b \end{cases}$$

□

سؤال ۵: معادلهٔ مشخصهٔ معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده به صورت $ar^2+br+c=0$ است. سه حالت می‌تواند رخ دهد:

(I) اگر معادلهٔ مشخصه دارای دو ریشهٔ حقیقی و متمایز r_1 و r_2 باشد آنگاه به ازای c_1 و c_2 یی در $\mathbb{R}$ داریم

$$y(x)=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}.$$

اما $r_1+r_2=\frac{-b}{a}<0$ و $r_1r_2=\frac{c}{a}>0$ و لذا r_1 و r_2 هر دو منفی هستند. در نتیجه $\lim_{x\to+\infty} y(x)=0$.

(II) اگر معادلهٔ مشخصه دارای ریشهٔ مضاعف r باشد آنگاه به ازای c_1 و c_2 یی در $\mathbb{R}$ داریم

$$y(x)=(c_1+c_2x)e^{rx}.$$

اما در این حالت $r=\frac{-b}{2a}<0$ و لذا مجدداً $\lim_{x\to+\infty} y(x)=0$.

(III) بالاخره اگر معادلهٔ مشخصه دارای دو ریشهٔ مختلط و متمایز $\alpha+i\beta$ و $\alpha-i\beta$ باشد آنگاه به ازای c_1 و c_2 یی در $\mathbb{R}$ داریم

$$y(x)=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x).$$

اما در این حالت $\alpha=\frac{1}{2}\left((\alpha+i\beta)+(\alpha-i\beta)\right)=\frac{-b}{2a}<0$ و لذا $\lim_{x\to+\infty} e^{\alpha x}=0$. چون $c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x$ تابعی کراندار است لذا مجدداً خواهیم داشت $\lim_{x\to+\infty} y(x)=0$. □

سؤال ۶: فرض کنید $y=y(x)$ جوابی برای مسألهٔ مقدار مرزی داده شده در $[a,b]$ باشد. فرض کنید $a<c<b$ موجود باشد که $y(c)\neq 0$. در این صورت $y(c)>0$ یا $y(c)<0$.

اگر $y(c)>0$، آنگاه با توجه به اینکه y پیوسته است دارای ماکزیمم مطلق در $[a,b]$ خواهد بود که با توجه به $y(c)>0$ این ماکزیمم مطلق مثبت است. از طرفی $y(a)=y(b)=0$ نتیجه می‌دهد که این ماکزیمم مطلق در نقطه‌ای از (a,b) مانند ξ رخ می‌دهد. پس $y(\xi)>0$ و نیز $y'(\xi)=0$. پس با توجه به فرض به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} y''(\xi) &= -p(\xi)y'(\xi)-q(\xi)y(\xi) \\ &= -q(\xi)y(\xi) \\ &> 0. \end{aligned}$$

اما $y''(\xi)>0$، با توجه به آزمون مشتق دوم، با ماکزیمم نسبی بودن ξ تناقض دارد. فرض $y(c)<0$ نیز به همین شکل به تناقض منجر می‌شود. پس برای هر $a<x<b$، $y(x)=0$ و چون $y(a)=y(b)=0$، لذا $y=0$ بر $[a,b]$. در نتیجه $y=0$ جواب منحصربه‌فرد مسألهٔ مقدار مرزی داده شده است. □