

مدت امتحان: ۳ ساعت

شنبه ۸۵/۳/۲۷

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل

۰۳۴-۲۲ (گروه‌های ۱ تا ۱۲)

نیمسال دوم ۸۵-۸۴

سؤال ۱. جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید (جواب عمومی را بر حسب تابعی صریح از x

بنویسید).

$$2y \ln(xy) dx + x dy = 0 \quad (x > 0, y > 0)$$

سؤال ۲. جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = \ln x - 1 \quad (x > 0)$$

سؤال ۳. با فرض

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 3 \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

و با استفاده از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس A ، جواب عمومی دستگاه معادلات دیفرانسیل $X'(t) = AX(t) + B(t)$ را به دست آورید.

سؤال ۴. یک جواب غیر صفر به صورت سری حول نقطه $x = 0$ برای معادله دیفرانسیل زیر به دست آورید (فرمول

ضرایب سری جواب را مشخص کنید).

$$x^2 y'' + xy' + (x-1)y = 0 \quad (x < 0)$$

سؤال ۵. با استفاده از تبدیلات لاپلاس جواب مسأله مقدار اولیه زیر را به دست آورید.

$$\begin{cases} x''(t) - 2x'(t) + x(t) = f(t) \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}, \quad f(t) = \begin{cases} 0 & : 0 \leq t < 1 \\ t & : 1 \leq t < 2 \\ 0 & : t \geq 2 \end{cases}$$

سؤال ۶. جواب مسأله مقدار اولیه زیر را به دست آورید.

$$\begin{cases} x''(t) - x'(t) + x(t) = e^t \left(1 - \int_0^t \frac{x(u)}{e^u} du \right) \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 2 \end{cases}$$

توزیع نمره: سؤال‌های ۱، ۴، ۵ و ۶: ۱۵ نمره، سؤال‌های ۲ و ۳: ۲۰ نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره.