بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

حل مسایل امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل (گروه‌های ۱ تا ۱۲)

سؤال ۱: به وضوح معادلهٔ داده شده کامل نمی‌باشد. عامل انتگرال سازی به شکل $x^n y^m$ را برای معادلهٔ داده شده جستجو می‌کنیم. برای این منظور n و m باید طوری باشند که داشته باشیم $\frac{\partial}{\partial x}(x^{n+1}y^m) = \frac{\partial}{\partial y}(2x^n y^{m+1}\ln(xy))$. این تساوی نیز نتیجه می‌دهد که $(n-1)x^n y^m = 2(m+1)x^n y^m \ln(xy)$. پس کافی است داشته باشیم $n=1$ و $m=-1$. در نتیجه $\frac{x}{y}$ عامل انتگرال ساز معادله می‌باشد که با ضرب آن در طرفین معادله، معادلهٔ کامل $2x\ln(xy)\,dx + \frac{x^2}{y}\,dy = 0$ به دست می‌آید. جواب به صورت "ثابت $= u(x,y)$" است که $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x\ln(xy)$ و $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=\frac{x^2}{y}$. با انتگرال گیری از معادلهٔ دوم برحسب y به دست می‌آید $u(x,y)=x^2\ln y + f(x)$ و لذا به کمک معادلهٔ اول می‌توانیم بنویسیم $2x\ln y + f'(x) = 2x\ln(xy)$ یا $f'(x)=2x\ln x$. پس می‌توان $f(x)$ را $x^2\ln x - \frac{1}{2}x^2$ انتخاب کرد. در نتیجه جواب معادلهٔ دیفرانسیل داده شده به صورت $x^2\ln y + x^2\ln x - \frac{1}{2}x^2 = c$ است که در آن $c\in\mathbb{R}$ ثابت دلخواهی است. پس جواب عمومی برحسب تابعی صریح از x به صورت

$$y=\frac{1}{x}\exp\left(\frac{c}{x^2}+\frac{1}{2}\right)$$

به دست می‌آید. □

سؤال ۲: معادلهٔ مشخصهٔ معادلهٔ دیفرانسیل همگن متناظر با معادلهٔ دیفرانسیل داده شده $r(r-1)-3r+4 = r^2-4r+4=0$ می‌باشد که دارای ریشهٔ مضاعف $r=2$ است. در نتیجه $y_1=x^2$ یک جواب معادلهٔ همگن متناظر است. به کمک روش کاهش مرتبه و با فرض $y_2 = x^2 u(x)$ به جستجوی جواب دیگر برای معادلهٔ همگن متناظر می‌پردازیم. جایگذاری y_2 در معادله به دست می‌دهد $xu''+u'=0$ و در نتیجه $\ln x$ می‌تواند کاندیدی برای $u(x)$ باشد. پس $y_2=x^2\ln x$ جوابی دیگر برای معادلهٔ همگن متناظر خواهد بود و به وضوح y_1 و y_2 مستقل خطی اند. برای یافتن یک جواب خصوصی از معادلهٔ دیفرانسیل داده شده می‌توان حدس زد که $y_p = a\ln x$ می‌تواند جواب باشد. با جایگذاری در معادله به دست می‌آید $a=\frac{1}{4}$. لذا $y_p=\frac{1}{4}\ln x$ نیز یک جواب خصوصی معادله خواهد بود و در نتیجه جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل داده شده به صورت

$$y=(c_1+c_2\ln x)x^2+\frac{1}{4}\ln x$$

است که در آن $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ ثابت‌های دلخواه می‌باشند. □

سؤال ۳: معادلهٔ مشخصهٔ ماتریس A،

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}-\lambda & -3 & 2\\ 3 & -\lambda & -3\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{bmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2+9)=0$$

می‌باشد که مقادیر ویژهٔ $\lambda_1=2$، $\lambda_2=3i$ و $\lambda_3=-3i$ را برای A به دست می‌دهد. بردار ویژهٔ وابسته به $\lambda_1=2$ برابر با $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ می‌باشد که جواب $\begin{bmatrix}e^{2t}\\0\\e^{2t}\end{bmatrix}$ را برای دستگاه همگن متناظر با دستگاه داده شده به دست می‌دهد. بردار ویژهٔ وابسته به $\lambda_2=3i$ نیز برابر با $\begin{bmatrix}i\\1\\0\end{bmatrix}$ می‌باشد که با توجه به

$$\begin{bmatrix} ie^{3it}\\ e^{3it}\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\sin 3t\\ \cos 3t\\ 0\end{bmatrix} + i\begin{bmatrix}\cos 3t\\ \sin 3t\\ 0\end{bmatrix}$$

جواب‌های مستقل خطی

$$\begin{bmatrix}\cos 3t\\ \sin 3t\\ 0\end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix}-\sin 3t\\ \cos 3t\\ 0\end{bmatrix}$$

را برای دستگاه همگن متناظر با دستگاه داده شده به دست می‌دهد. این سه جواب به دست آمده مستقل خطی اند و لذا ماتریس اساسی دستگاه همگن متناظر به دست می‌آید:

$$U(t)=\begin{bmatrix} e^{2t} & \cos 3t & -\sin 3t \\ 0 & \sin 3t & \cos 3t \\ e^{2t} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

برای یافتن یک جواب خصوصی دستگاه نیز می‌توانیم از روش تغییر پارامتر استفاده کنیم. در واقع یک جواب خصوصی دستگاه برابر است با

$$X_p(t)=U(t)\int_0^t U^{-1}(s)\begin{bmatrix} e^{2s} \\ 3 \\ e^{2s} \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} te^{2t}-1 \\ 0 \\ te^{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

لذا جواب عمومی دستگاه داده شده به صورت

$$X(t)=\begin{bmatrix} e^{2t} & \cos 3t & -\sin 3t \\ 0 & \sin 3t & \cos 3t \\ e^{2t} & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} te^{2t}-1 \\ 0 \\ te^{2t} \end{bmatrix}$$

می‌باشد که در آن $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ ثابت‌های دلخواه می‌باشند. □

سوال ۴: چون $x=0$ نقطهٔ منفرد منظم معادلهٔ دیفرانسیل داده شده است، از روش فروبنیوس استفاده می‌کنیم. با فرض $y=x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ و جایگذاری در معادله به دست می‌آوریم:

$$(r^2-1)a_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[(n+r)^2-1\right]a_n+a_{n-1}\right\}x^{n+r}=0.$$

پس $r=1$ یکی از ریشه‌های معادلهٔ مشخصه است و با فرض $a_0=1$ خواهیم داشت: $a_n=-\frac{1}{n(n+2)}a_{n-1}$ $(n\geq 1)$.

اکنون به راحتی می‌توان نتیجه گرفت

$$a_n=(-1)^n\frac{2}{n!\,(n+2)!},\quad n\geq 0.$$

در نتیجه یک جواب غیرصفر معادلهٔ دیفرانسیل داده شده به صورت سری حول $x=0$ عبارت است از

$$y=x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n!\,(n+2)!}x^n. \quad □$$

سوال ۵: معادلهٔ دیفرانسیل متناظر با مسألهٔ مقدار اولیهٔ داده شده $x''(t)-2x'(t)+x(t)=tu_1(t)-tu_2(t)$ می‌باشد. لذا با فرض $\mathcal{L}(x(t))=X(s)$ به دست می‌آوریم:

$$s^2X(s)-1-2sX(s)+X(s)=\frac{s+1}{s^2}e^{-s}-\frac{2s+1}{s^2}e^{-2s}.$$

در نتیجه

$$X(s)=\frac{1}{(s-1)^2}+\left(\frac{2}{(s-1)^2}-\frac{3}{s-1}+\frac{1}{s^2}+\frac{3}{s}\right)e^{-s}-\left(\frac{3}{(s-1)^2}-\frac{4}{s-1}+\frac{1}{s^2}+\frac{4}{s}\right)e^{-2s}.$$

پس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x(t)&=te^t+u_1(t)\left(2(t-1)e^{t-1}-3e^{t-1}+(t-1)+3\right)\\ &\quad-u_2(t)\left(3(t-2)e^{t-2}-4e^{t-2}+(t-2)+4\right)\\ &=te^t+u_1(t)\left(t+2+(2t-5)e^{t-1}\right)\\ &\quad-u_2(t)\left(t+2+(3t-10)e^{t-2}\right). \end{aligned}$$

پس جواب مسألهٔ مقدار اولیهٔ داده شده عبارت است از

$$x(t)=\begin{cases} te^t & : 0\leq t<1 \\ te^t+t+2+(2t-5)e^{t-1} & : 1\leq t<2 \\ te^t+(2t-5)e^{t-1}-(3t-10)e^{t-2} & : t\geq 2 \end{cases}$$

□

سوال ۶: معادلهٔ دیفرانسیل متناظر با مسألهٔ مقدار اولیهٔ داده شده

$$x''(t)-x'(t)+x(t)=e^t-\int_0^t e^{t-u}x(u)\,du$$

می‌باشد. لذا با فرض $\mathcal{L}(x(t))=X(s)$ به دست می‌آوریم:

$$s^2X(s)-s-2-sX(s)+1+X(s)=\frac{1}{s-1}-\frac{X(s)}{s-1}.$$

پس خواهیم داشت:

$$X(s)=\frac{s-1}{(s-1)^2+1}+\frac{1}{(s-1)^2+1}.$$

در نتیجه جواب مسألهٔ مقدار اولیهٔ داده شده عبارت است از

$$x(t)=e^t(\cos t+\sin t). \quad □$$