



استان میان ترم جبر همولوژی

۲۲-۲۴۶+

نیال دوم ۸۴-۸۵

سؤال ۱. فرض کنید R و S دو حلقه یکدار، $\mathcal{M} \rightarrow_S \mathcal{M} \rightarrow_R \mathcal{M}$ یک تابعگون همی همورد و n عدد صحیح نامنفی باشد.

(الف) صورت قضیه متعابه را برای مدول‌های پروژکتیو بنویسید و آنرا ثابت کنید.

(ب) برای R -مدول \mathcal{C} داده شده A ، S -مدول \mathcal{C} ، $L_n^T(A)$ را تعریف کنید و ثابت کنید این تعریف مستقل از انتخاب تحلیل پروژکتیوی است که برای A در نظر گرفته‌اید.

(ج) برای R -مدول‌های \mathcal{C} داده شده A و B و R -هم‌نختی $f: A \rightarrow B$ ، S -هم‌نختی $L_n^T(f): L_n^T(A) \rightarrow L_n^T(B)$ را تعریف کرده و خوش تعریف آنرا ثابت کنید.

(د) ثابت کنید $L_n^T: \mathcal{M} \rightarrow_S \mathcal{M} \rightarrow_R \mathcal{M}$ تابعگون همی هموردی باشد. نام این تابعگون چیست؟ (ه) صورت لم نفل اسب را بنویسید و آنرا ثابت کنید.

(و) صورت دقیق حکم زیر را بنویسید و آنرا ثابت کنید. در اثبات از کدام قضیه مهم استفاده می‌کنید؟ صورت آن قضیه چیست؟

"اگر دنباله دقیق کوتاهی از R -مدول‌ها و R -هم‌نختی‌ها داشته باشیم آنگاه

دنباله دقیق بلندی از S -مدول‌ها و S -هم‌نختی‌ها به کمک L_n^T القا می‌شود."

(ز) تابعگون $R^n T: \mathcal{M} \rightarrow_S \mathcal{M} \rightarrow_R \mathcal{M}$ را (بدون اشاره به اثبات خوش تعریفی‌ها و صورت قضایای لازم) تعریف کنید.

سؤال ۲. فرض کنید R حلقه یکدار و n عدد صحیح نامنفی باشد.

(الف) برای R -مدول A ، $\text{Tor}_n^R(A, -)$ را تعریف کنید.

(ب) برای R -مدول \mathcal{C} ، $\text{tor}_n^R(-, B)$ را تعریف کنید.

(ج) برای R -مدول \mathcal{C} ، $\text{Ext}_R^n(-, B)$ را تعریف کنید.



(د) برای R - مدول A ، $\text{ext}_R^n(A, -)$ را تعریف کنید.

سؤال ۳. فرض کنید R حلقه جابه‌جایی و یک‌دار باشد و $x, y \in R$. دنباله‌های $K(x)$ ، $\overleftarrow{K}(x)$ و $K(x, y)$ از R - مدول‌ها و R - هم‌رختی‌ها را به صورت زیر در نظر بگیرید که R - هم‌رختی‌ها $x \cdot$ ، $[y \ x]$ و $\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ به ترتیب با ضابطه‌های $x \cdot (r) = rx$ ، $[y \ x](r) = (ry, rx)$ و $(r_1, r_2) = r_1x - r_2y$ تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} K(x): \quad & \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow R \xrightarrow{x \cdot} R \longrightarrow 0 \\ \overleftarrow{K}(x): \quad & \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow R \xrightarrow{x \cdot} R \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \\ K(x, y): \quad & \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow R \xrightarrow{[y \ x]} R \cup R \xrightarrow{\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}} R \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

(الف) ثابت کنید $K(x)$ ، $\overleftarrow{K}(x)$ و $K(x, y)$ هم‌بافت‌های R - هم‌رختی هستند.

(ب) ثابت کنید دنباله دقیق کوتاهی به شکل زیر وجود دارد.

$$0 \longrightarrow K(x) \longrightarrow K(x, y) \longrightarrow \overleftarrow{K}(x) \longrightarrow 0$$

(ج) ضابطه R - هم‌رختی انتقالی زیر را به طور صریح مشخص کنید.

$$\delta: H_p(\overleftarrow{K}(x)) \longrightarrow H_p(K(x))$$

(د) اگر R نوتری فرض شود، $H_1(K(x, y)) = 0$ و $y \in J(R)$ ، ثابت کنید x مقسوم علیه صفر نمی‌باشد.

توزیع نمره. سؤال ۱: (الف) ۵ + ۵ نمره، (ب) ۵ + ۱۰ نمره، (ج) ۵ نمره، (د) ۸ + ۱ نمره، (ه) ۵ + ۱۰ نمره، (و) ۲ + ۲ + ۲ نمره، (ز) ۴ نمره.

سؤال ۲: هر کدام ۲ نمره.

سؤال ۳: (الف) ۳ نمره، (ب) ۵ نمره، (ج) ۵ نمره، (د) ۱۰ نمره.