تاریخ ۸۵/۳/۲۴
شماره ....
پیوست ....

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

امتحان پایان ترم جبر همولوژی

۲۲-۲۴۶+

نیمسال دوم ۸۵-۸۴

سؤال ۱. فرض کنید R حلقه‌ای یکدار، $\{B_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از R-مدول‌های چپ و A، R-مدولی راست باشد. ثابت کنید برای هر $n\geq 0$،

$$Tor_n^R\left(A, \coprod_{i\in I} B_i\right) \underset{\mathbb{Z}}{\cong} \coprod_{i\in I} Tor_n^R(A, B_i).$$

(۱۶ نمره)

سؤال ۲. فرض کنید R حوزه‌ای صحیح و F میدان کسرهای آن باشد. اگر A، R-مدولی تابدار باشد ثابت کنید

$$Ext^1_R(A,R) \underset{R}{\cong} Hom_R(A, F/R).$$

(۱۰ نمره)

سؤال ۳. فرض کنید R حلقه‌ای یکدار و B، R-مدولی چپ باشد. ثابت کنید $id(B)\leq n$ اگر و فقط اگر تابعگون $Ext^n_R(-,B)$ دقیق راست باشد. (۱۲+۳ نمره)

سؤال ۴. فرض کنید R حلقه‌ای یکدار و A، R-مدولی چپ باشد با این ویژگی که $pd(A)=n<\infty$. ثابت کنید R-مدول آزاد F موجود است طوری که $Ext^n_R(A,F)\neq 0$. (۱۰ نمره)

سؤال ۵. فرض کنید R حلقه‌ای یکدار باشد. مراحلی را که منجر به تعریف بُعد سرتاسری چپ برای حلقهٔ R می‌شود را بنویسید (تعریف $lpD(R)$، تعریف $liD(R)$، اثبات تساوی آنها و در نهایت تعریف $lD(R)$). اگر R نوتری نیز باشد چه ارتباطی بین $lD(R)$ و $rD(R)$ وجود دارد؟ ثابت کنید. (۱۰+۶ نمره)

سؤال ۶. ثابت کنید اگر R حلقه‌ای یکدار بوده با این ویژگی که هر R-مدول دوری پروژکتیو باشد آنگاه هر R-مدول دلخواه پروژکتیو خواهد بود. (۱۲ نمره)

سؤال ۷. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار باشد و I و J دو ایده‌آل از R با این ویژگی که $I+J=R$. اگر A و B، R-مدول باشند و $AI=BJ=0$، ثابت کنید برای هر $n\geq 1$، $Ext^n_R(A,B)=0$. (۱۲ نمره)

سؤال ۸. برای $\mathbb{Z}$-مدول‌های $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z}$، با ذکر دلیل، $pd(\mathbb{Q})$، $id(\mathbb{Z})$، $lD(\mathbb{Z})$ و $rD(\mathbb{Z})$ را محاسبه کنید. (۷ نمره)

مجموع: ۱۰۰ نمره