تاریخ: ۸۵/۹/۲
شماره:
پیوست:

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

امتحان میان‌ترم جبر جابه‌جایی

۲۲-۲۴۳+

نیمسال اول ۸۶-۸۵

در این امتحان منظور از حلقه، حلقهٔ جابه‌جایی و یکدار است و $1\neq 0$.
برای هر همریختی حلقه‌ای $\varphi: R\to S$، $\varphi(1_R)=1_S$ و برای هر زیرحلقهٔ S از R، $1_S=1_R$. منظور از R-مدول M، R-مدول چپ M است که با ضرب در اسکالر $m\cdot r := rm$ ساختار R-مدول راست دارد.

سؤال ۱. فرض کنید R حلقه، S زیرمجموعهٔ بستهٔ ضربی از R و M، R-مدول باشد. (نمره ۲۵ = ۱۰+۱۰+۵)

الف) بدون ذکر دلیل، ساختار $S^{-1}R$-مدولی $S^{-1}R\otimes_R M$ را مشخص کنید.

ب) ثابت کنید $S^{-1}R\otimes_R M \underset{S^{-1}R}{\cong} S^{-1}M$.

ج) ثابت کنید اگر M متناهی مولد نیز فرض شود و برای هر $\mathfrak{m}\in Max(R)$ داشته باشیم $M\otimes_R R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}=0$، آنگاه $M=0$.

سؤال ۲. (نمره ۴۵ = ۱۵+۵+۱۰+۱۵)

الف) فرض کنید R حلقه‌ای نوتری باشد. ثابت کنید هر ایده‌آل تحویل‌ناپذیر از R، ایده‌آلی اولیه است.

ب) فرض کنید R حلقه‌ای نوتری باشد. ثابت کنید هر ایده‌آل سرهٔ R دارای تجزیهٔ اولیهٔ مینیمال است.

ج) صورت قضایای اول و دوم یگانگی تجزیهٔ اولیه را بنویسید.

د) صورت گزارهٔ مهمی را که برای اثبات قضیهٔ اول یگانگی لازم است بنویسید و آن را ثابت کنید. سپس قضیهٔ اول یگانگی را نتیجه بگیرید.

بسمه تعالی

تاریخ: ۸۵/۹/۲
شماره:
پیوست:

دانشگاه صنعتی شریف

سؤال ۳. الف) فرض کنید R حلقه‌ای نوتری و I ایده‌آلی از R باشد. ثابت کنید اگر $J=\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n$، آنگاه $J=IJ$.

ب) صورت قضیهٔ اشتراک کرول را بنویسید و آن را ثابت کنید.

(۱۰+۱۵=۲۵ نمره)

سؤال ۴. الف) فرض کنید R حلقه و I ایده‌آلی از R باشد با این ویژگی که $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n=0$. R را به ترتیب I-ادیک مجهز کنید و برای ایده‌آل دلخواه J، بستار J را با ذکر دلیل مشخص کنید.

ب) صورت قضیهٔ شارپ در مورد تعمیم قضیهٔ اجتناب از ایده‌آل‌های اول به حالت شمارا را بنویسید و آن را ثابت کنید.

(۱۰+۱۵=۲۵ نمره)

سؤال ۵. فرض کنید R حلقه‌ای نوتری و S زیرمجموعهٔ بستهٔ ضربی از R باشد. M را R-مدولی متناهی مولد و N را R-مدولی دلخواه در نظر بگیرید.

الف) ثابت کنید $S^{-1}\operatorname{Hom}_R(M,N)\underset{S^{-1}R}{\cong}\operatorname{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M,S^{-1}N)$.

ب) ثابت کنید اگر $\underline{p}\in\operatorname{Supp}_R(M)$، آنگاه $\operatorname{Hom}_R(M,R/\underline{p})\neq 0$.

(۲۰+۳۰=۵۰ نمره)

راهنمایی برای قسمت (الف): ابتدا نشان دهید دنباله‌ای دقیق به صورت $F_1\to F_0\to M\to 0$ وجود دارد که F_0 و F_1، R-مدول‌های آزاد هستند.

سؤال ۶. حلقهٔ R را کاهشی می‌نامند هرگاه عضو پوچ‌توان غیرصفری نداشته باشد. ثابت کنید اگر R نوتری باشد، آنگاه شرایط زیر معادل اند:

الف) R کاهشی است.

ب) برای هر $\underline{p}\in\operatorname{ass}_R(0)$، $R_{\underline{p}}$ میدان است.

ج) برای هر $\underline{p}\in\operatorname{ass}_R(0)$، $R_{\underline{p}}$ حوزهٔ صحیح است.

(۱۵+۱۵=۳۰ نمره)

مجموع = ۲۰۰ نمره