دانشگاه صنعتی شریف

بسمه تعالی

تاریخ: ۸۵/۸/۲۵

شماره:

پیوست:

# حل مسایل امتحان میان ترم معادلات دیفرانسیل (گروه‌های ۱ تا ۸)

سؤال ۱: با نوشتن $\frac{dy}{dx}$ به جای $y'$ به دست می‌آوریم:

$$y\,dx-(x^2+y^2+x)\,dy=0.$$

فرض می‌کنیم عامل انتگرال ساز معادله به صورت $\mu(x,y)=f(x^2+y^2)$ باشد. درنتیجه

$$f(x^2+y^2)\,y\,dx-f(x^2+y^2)(x^2+y^2+x)\,dy=0$$

معادلهٔ دیفرانسیلی کامل است و لذا بایستی داشته باشیم:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[-f(x^2+y^2)(x^2+y^2+x)\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[f(x^2+y^2)\,y\right],$$

$$-\left[2xf'(x^2+y^2)(x^2+y^2+x)+(2x+1)f(x^2+y^2)\right]=2yf'(x^2+y^2)\,y+f(x^2+y^2),$$

$$-\left[(x^2+y^2+x)(2xf'(x^2+y^2))+y(2yf'(x^2+y^2))\right]=(2x+2)f(x^2+y^2),$$

$$-(x^2+y^2)(2x+2)f'(x^2+y^2)=(2x+2)f(x^2+y^2),$$

$$\frac{f'(x^2+y^2)}{f(x^2+y^2)}=-\frac{1}{x^2+y^2}.$$

درنتیجه $f(x^2+y^2)=\frac{1}{x^2+y^2}$ که نشان می‌دهد $\mu(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$ عامل انتگرال ساز معادلهٔ داده شده است. با ضرب طرفین معادله در این عامل انتگرال ساز معادلهٔ دیفرانسیل کامل زیر را به دست می‌آوریم:

$$\frac{y}{x^2+y^2}\,dx-\left(1+\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy=0.$$

درنتیجه جواب به صورت $u(x,y)=$ ثابت است که در آن $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-\left(1+\frac{x}{x^2+y^2}\right)$. انتگرال‌گیری از معادلهٔ اول به دست می‌دهد که $u(x,y)=-\tan^{-1}\frac{y}{x}+g(y)$ و لذا با جایگذاری در معادلهٔ دوم به دست می‌آوریم:

$$-\frac{x}{x^2+y^2}+g'(y)=-1-\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$g'(y)=-1.$$

پس می‌توان فرض کرد $g(y)=-y$ و لذا جواب عمومی به صورت

$$y+\tan^{-1}\frac{y}{x}=c$$

است که در آن $c$ ثابت دلخواه است. □

سؤال ۲: می‌توان معادله را به صورت زیر نوشت:

$$y'+\left(\frac{1}{2}\tan x\right)y=\frac{1}{2}e^x(\tan x-1)\,y^3.$$

این معادله از نوع برنولی است، پس می‌توانیم تغییر متغیر $y^{-2}=u$ را درنظر بگیریم. دراین صورت داریم $-2y^{-3}y'=u'$ و درنتیجه

$$u'-(\tan x)\,u=e^x(1-\tan x).$$

عامل انتگرال ساز معادلهٔ اخیر $\exp\left(\int^x(-\tan t)\,dt\right)=\cos x$ می‌باشد که با ضرب آن در طرفین معادله به دست می‌آوریم:

$$u'\cos x-(\sin x)\,u=e^x(\cos x-\sin x),$$

$$(u\cos x)'=(e^x\cos x)'.$$

درنتیجه $u\cos x=e^x\cos x+c$ یا $u=e^x+\frac{c}{\cos x}$ که در آن $c$ ثابت دلخواهی است. پس $y^{-2}=\frac{e^x\cos x+c}{\cos x}$ و لذا

$$y=\pm\sqrt{\frac{\cos x}{e^x\cos x+c}}$$

جواب عمومی معادلهٔ داده شده است. □

سؤال ۳: معادلهٔ مشخصهٔ معادلهٔ دیفرانسیل همگن متناظر $\lambda^2-1=0$ می‌باشد که دارای ریشه‌های $\lambda_1=1$ و $\lambda_2=-1$ است. درنتیجه $y_1=x$ و $y_2=x^{-1}$ دو جواب مستقل خطی این معادلهٔ دیفرانسیل همگن متناظر می‌باشد. از طرفی بنابر روش تغییر پارامترها یک جواب خصوصی برای معادلهٔ داده شده به صورت $y=u_1x+u_2x^{-1}$ است که در آن

$$u_1=-\int^x\frac{-2e^t(t^{-1})}{-2t^{-1}}\,dt=-\int^x e^t\,dt=-e^x,$$

$$u_2=\int^x\frac{-2e^t(t)}{-2t^{-1}}\,dt=\int^x t^2e^t\,dt=e^x(x^2-2x+2).$$

بسمه تعالی



پس یک جواب خصوصی برای معادلهٔ داده شده عبارت است از

$$y=(-e^x)x+e^x(x^2-2x+2)x^{-1}=2e^x(x^{-1}-1).$$

در نتیجه جواب عمومی معادلهٔ داده شده به صورت زیر است که در آن $c_1$ و $c_2$ ثابت های دلخواه هستند:

$$y=c_1x+c_2x^{-1}+2e^x(x^{-1}-1).$$ □

**سؤال ۴:** معادلهٔ مشخصهٔ معادلهٔ دیفرانسیل همگن متناظر به صورت $\lambda^4+2\lambda^2+1=0$ است که دارای ریشه‌های $\lambda_1=i$ و $\lambda_2=-i$ که هرکدام از درجهٔ تکرار ۲ هستند می باشد. در نتیجه $y_1=\cos x$ ، $y_2=x\cos x$ ، $y_3=\sin x$ و $y_4=x\sin x$ چهار جواب مستقل خطی برای معادلهٔ دیفرانسیل همگن متناظر می باشد. از طرفی بنابر روش ضرایب نامعین $y=x^2(a\cos x+b\sin x)$ کاندیدایی مناسب برای جواب خصوصی معادلهٔ داده شده می باشد. با جایگذاری در معادله به دست می آوریم $a=\frac{-1}{2}$ و $b=\frac{1}{4}$ و لذا یک جواب خصوصی معادلهٔ داده شده عبارت است از $y=\frac{1}{4}x^2(\sin x-2\cos x)$.

در نتیجه جواب عمومی معادلهٔ داده شده به صورت زیر است که در آن $c_1$ ، $c_2$ ، $c_3$ و $c_4$ ثابت های دلخواه هستند:

$$y=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x+\frac{1}{4}x^2(\sin x-2\cos x).$$ □

**سؤال ۵:** بنابر قضیهٔ خوانده شده جواب عمومی معادلهٔ داده شده را می توان حول نقطهٔ $x_0=0$ که نقطهٔ عادی برای معادله محسوب می شود به سری تیلور (در اینجا با شعاع همگرایی $R=+\infty$) بسط داد. فرض کنید بسط جواب به صورت

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

باشد. در نتیجه

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},\quad y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2},$$

و لذا با جایگذاری در معادله به دست می آوریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0,$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=3}^{\infty}(n-2)a_{n-2}x^{n-2}+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}=0,$$

$$(2a_2+a_0)+\sum_{n=3}^{\infty}\left[(n-1)(na_n+a_{n-2})\right]x^{n-2}=0.$$

اکنون یگانگی بسط تابع "صفر" به سری تیلور نتیجه می دهد که

$$\begin{cases}a_0+2a_2=0\\ a_n=\frac{-1}{n}a_{n-2}\quad(n\geq3)\end{cases}$$

با فرض $a_0=c_1$ و $a_1=c_2$ به دست می آوریم:

$$a_0=c_1,\qquad a_1=c_2$$
$$a_2=\frac{-1}{2}c_1,\qquad a_3=\frac{-1}{3}c_2$$
$$a_4=\left(\frac{-1}{4}\right)\left(\frac{-1}{2}c_1\right),\qquad a_5=\left(\frac{-1}{5}\right)\left(\frac{-1}{3}c_2\right)$$
$$a_6=\left(\frac{-1}{6}\right)\left(\frac{-1}{4}\right)\left(\frac{-1}{2}c_1\right),\qquad a_7=\left(\frac{-1}{7}\right)\left(\frac{-1}{5}\right)\left(\frac{-1}{3}c_2\right)$$
$$\vdots\qquad\qquad\vdots$$

در نتیجه برای $n\geq1$ می توانیم بنویسیم:

$$a_{2n}=\frac{(-1)^n}{(2n)\times\cdots\times4\times2}c_1,\quad a_{2n+1}=\frac{(-1)^n}{(2n+1)\times\cdots\times5\times3}c_2.$$

پس برای $n\geq1$ داریم

$$a_{2n}=\frac{(-1)^n}{2^n\times n!}c_1,\quad a_{2n+1}=\frac{(-1)^n\times2^n\times n!}{(2n+1)!}c_2$$

که در این نمایش، فرمول ها به ازای $n=0$ نیز با $a_0$ و $a_1$ به دست آمده در بالا تطابق دارند. پس

$$y=c_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\times n!}x^{2n}+c_2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\times2^n\times n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

بسط تیلور جواب عمومی حول نقطهٔ $x_0=0$ می باشد که در اینجا $c_1$ و $c_2$ ثابت های دلخواه هستند. □