

مدت امتحان: ۳ ساعت

پنجشنبه ۸۵/۱۰/۲۱

امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل

۰۳۴-۲۲ (گروه‌های ۱ تا ۸)

نیمسال اول ۸۶-۸۵

سؤال ۱. یک جواب غیر صفر به صورت سری حول نقطه  $x = 0$  برای معادله دیفرانسیل زیر به دست آورید.

$$y'' + \left(4x^2 + \frac{1}{4x^2}\right)y = 0$$

سؤال ۲. با فرض

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & \frac{2}{t} \\ \frac{2}{t} & \frac{2}{t} \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} t + \frac{1}{t} \\ t - \frac{1}{t} \end{bmatrix} \quad (t > 0)$$

و با استفاده از روش تغییر پارامترها، جوابی از دستگاه معادلات دیفرانسیل  $Y' = A(t)Y + B(t)$  را که به ازای  $t = 1$  برابر با صفر می‌شود به دست آورید (راهنمایی: برای یافتن یک ماتریس اساسی برای دستگاه همگن متناظر، جواب‌هایی به صورت  $Y(t) = t^\lambda P$  بردار ثابت، را امتحان کنید).

سؤال ۳. با فرض

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

جواب عمومی دستگاه معادلات دیفرانسیل  $Y' = AY$  را، با یافتن یک ماتریس اساسی برای دستگاه، به دست آورید.

سؤال ۴. وضعیت مبدأ مختصات را، از نظر پایداری، پایداری مجانبی یا ناپایداری، برای دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x' = -x^3 - 6y^2 \\ y' = 3x^5 - 2y^3 \end{cases} \quad \text{دیفرانسیل زیر بررسی کنید.}$$

سؤال ۵. با استفاده از تبدیلات لاپلاس، جواب مسأله مقدار اولیه زیر را به دست آورید.

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = f(t) \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}, \quad f(t) = \begin{cases} 0 & : 0 \leq t < 3 \\ 2t - 6 & : t \geq 3 \end{cases}$$

سؤال ۶. جواب معادله انتگرالی زیر را به دست آورید.

$$y(t) + \int_0^t y(t-\xi)y(\xi)d\xi = 2(2t+1)e^{2t}$$

توزیع نمره: سؤال‌های ۲ و ۳: ۲۰ نمره، سؤال‌های ۱، ۴، ۵ و ۶: ۱۵ نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره.