بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

حل مسایل امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل (گروه‌های ۱ تا ۸)

سؤال ۱: چون $x=0$ نقطهٔ منفرد منظم معادلهٔ دیفرانسیل داده شده است، از روش فروبنیوس استفاده می‌کنیم. با فرض $y=x^s\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ و جایگذاری در معادله به دست می‌آوریم:

$$(4s^2-4s+1)a_0x^s+(4s^2+4s+1)a_1x^{s+1}+(4s^2+12s+9)a_2x^{s+2}+(4s^2+20s+25)a_3x^{s+3}+\sum_{n=4}^{\infty}\{[4(n+s)(n+s-1)+1]a_n+16a_{n-4}\}x^{s+n}=0.$$

پس $4s^2-4s+1=0$ معادلهٔ مشخصهٔ معادلهٔ دیفرانسیل داده شده است که دارای ریشهٔ مضاعف $s=\frac{1}{2}$ می‌باشد و با فرض $a_0=1$ خواهیم داشت: $a_1=a_2=a_3=0$ و برای $n\geq 4$، $a_n=-\frac{4}{n^2}a_{n-4}$. از روابط مذکور نتیجه می‌شود که برای $n\geq 0$،

$$\begin{cases}a_{4n}=\dfrac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2},\\[2mm] a_{4n+1}=a_{4n+2}=a_{4n+3}=0.\end{cases}$$

پس یک جواب غیرصفر به صورت سری حول نقطهٔ $x=0$ برای معادلهٔ دیفرانسیل داده شده عبارت است از:

$$y=\sqrt{|x|}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}x^{4n}.\quad\square$$

سؤال ۲: ابتدا یک ماتریس اساسی برای دستگاه همگن متناظر، یعنی $Y'=A(t)Y$، به دست می‌آوریم. برای این منظور فرض کنید $Y(t)=t^{\lambda}P$ کاندیدایی برای جواب باشد. لذا $\lambda t^{\lambda-1}P=t^{\lambda}A(t)P$ یا $\lambda t^{\lambda-1}P=t^{\lambda-1}\begin{bmatrix}1&2\\3&2\end{bmatrix}P$. در نتیجه $\begin{bmatrix}1&2\\3&2\end{bmatrix}P=\lambda P$. در نتیجه λ مقدار ویژهٔ ماتریس $\begin{bmatrix}1&2\\3&2\end{bmatrix}$ و P بردار ویژهٔ وابسته به آن است. پس λ را می‌توان از حل معادلهٔ $\lambda^2-3\lambda-4=0$ به دست آورد: $\lambda_1=-1$ و $\lambda_2=4$. بردارهای ویژهٔ وابسته به λ_1 و λ_2 نیز به راحتی به دست می‌آیند که به ترتیب عبارتند از: $P_1=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ و $P_2=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$.

در نتیجه $Y_1(t)=t^{-1}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/t\\-1/t\end{bmatrix}$ و $Y_2(t)=t^4\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2t^4\\3t^4\end{bmatrix}$ دو جواب دستگاه همگن متناظر، یعنی $Y'=A(t)Y$، هستند. لذا

$$\Psi(t)=\begin{bmatrix}1/t&2t^4\\-1/t&3t^4\end{bmatrix}$$

یک ماتریس جواب برای دستگاه همگن متناظر، یعنی $Y'=A(t)Y$، است. توجه می‌کنیم از آنجایی که $\det\Psi(t)=5t^3\neq 0$، $\Psi(t)$ در واقع یک ماتریس اساسی دستگاه همگن متناظر می‌باشد. اکنون با استفاده از روش تغییر پارامترها، به راحتی می‌توانیم جوابی از دستگاه داده شده را که به ازای $t=1$ برابر با صفر می‌شود را به دست آوریم:

$$Y(t)=\Psi(t)\int_1^t\Psi^{-1}(\xi)\begin{bmatrix}\xi+1/\xi\\ \xi-1/\xi\end{bmatrix}d\xi$$

$$=\begin{bmatrix}1/t&2t^4\\-1/t&3t^4\end{bmatrix}\int_1^t\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\xi&-\frac{2}{5}\xi\\ \frac{1}{5\xi^4}&\frac{1}{5\xi^4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi+1/\xi\\ \xi-1/\xi\end{bmatrix}d\xi$$

$$=\begin{bmatrix}1/t&2t^4\\-1/t&3t^4\end{bmatrix}\int_1^t\begin{bmatrix}\frac{1}{5}\xi^2+1\\ \frac{2}{5\xi^3}\end{bmatrix}d\xi$$

$$=\begin{bmatrix}1/t&2t^4\\-1/t&3t^4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{15}t^3+t-\frac{16}{15}\\ -\frac{1}{5t^2}+\frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}t^4-\frac{1}{3}t^2-\frac{16}{15t}+1\\ \frac{3}{5}t^4-\frac{2}{3}t^2+\frac{16}{15t}-1\end{bmatrix}.\quad\square$$

سؤال ۳: معادلهٔ مشخصهٔ ماتریس A

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}-\lambda&-1&1\\2&-3-\lambda&1\\1&-1&-1-\lambda\end{bmatrix}=-(\lambda+2)(\lambda+1)^2=0$$

می‌باشد که مقادیر ویژهٔ $\lambda_1=-2$ و $\lambda_2=-1$ را برای A به دست می‌دهد. بردار ویژهٔ وابسته به $\lambda_1=-2$ برابر با $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ می‌باشد که جواب $\begin{bmatrix}0\\e^{-2t}\\e^{-2t}\end{bmatrix}$ را برای دستگاه به دست می‌دهد. بُعد فضای ویژهٔ وابسته به $\lambda_2=-1$ برابر با ۱ می‌باشد و لذا فقط یک بردار ویژهٔ

مستقل خطی می‌توان به دست آورد: $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$. این بردار ویژه جواب $\begin{bmatrix}e^{-t}\\e^{-t}\\0\end{bmatrix}$ را برای دستگاه به دست می‌دهد. کاندیدا برای جواب دیگر $Y(t)=(P_0+P_1t)e^{-t}$ است که در آن $\begin{cases}(A+I)P_1=0\\(A+I)P_0=P_1\end{cases}$.

می‌توان P_1 و P_0 را به این صورت انتخاب کرد: $P_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ و $P_0=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$.

در نتیجه جوابی دیگر برای دستگاه داده شده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}t\right)e^{-t}=\begin{bmatrix}te^{-t}\\te^{-t}\\e^{-t}\end{bmatrix}.$$

پس جواب عمومی دستگاه داده شده به صورت زیر است که در آن c_1، c_2 و c_3 ثابت‌های دلخواه هستند:

$$Y(t)=\begin{bmatrix}0&e^{-t}&te^{-t}\\e^{-2t}&e^{-t}&te^{-t}\\e^{-2t}&0&e^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}. \quad \square$$

سؤال ۴: تابع $V:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ را به صورت $V(x,y)=2x^6+3y^8$ تعریف می‌کنیم. V تابعی مثبت معین است و چون

$$\dot V(x,y)=12x^5(-x^3-6y^7)+24y^7(3x^5-2y^3)$$
$$=-(12x^8+48y^{10})\leq 0,$$

لذا $-\dot V$ نیز تابعی مثبت معین خواهد بود که نشان می‌دهد مبدأ مختصات برای دستگاه داده شده پایدار مجانبی است.

(توجه: با فرض $V(x,y)=ax^{2m}+by^{2n}$ می‌توان به تابع اشاره شده در بالا دست یافت.) $\square$

سؤال ۵: معادلهٔ دیفرانسیل متناظر با مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده شده $y''+2y'+y=2u_3(t)(t-3)$ می‌باشد. لذا با فرض $\mathcal{L}(y)=Y$ به دست می‌آوریم:

$$(s^2Y(s)-2s-1)+2(sY(s)-2)+Y(s)=2e^{-3s}/s^2.$$

در نتیجه

$$Y(s)=\frac{2s+5}{(s+1)^2}+\frac{2e^{-3s}}{s^2(s+1)^2}$$
$$=\frac{2}{s+1}+\frac{3}{(s+1)^2}+2e^{-3s}\left(\frac{-2}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}\right).$$

پس خواهیم داشت:

$$y=2e^{-t}+3te^{-t}+2u_3(t)\left[-2+(t-3)+2e^{-(t-3)}+(t-3)e^{-(t-3)}\right]$$
$$=(2+3t)e^{-t}+2u_3(t)\left[(t-5)+(t-1)e^{-(t-3)}\right].$$

پس جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده شده عبارت است از:

$$y=\begin{cases}(2+3t)e^{-t} & : 0\leq t<3\\(2+3t)e^{-t}+(2t-10)+(2t-2)e^{-(t-3)} & : t\geq 3\end{cases}$$

$\square$

سؤال ۶: با فرض $\mathcal{L}(y)=Y$ به دست می‌آوریم:

$$Y(s)+Y^2(s)=\frac{4}{(s-2)^2}+\frac{2}{s-2}$$
$$=\frac{2s}{(s-2)^2}.$$

از حل معادلهٔ درجهٔ دوم به دست آمده برحسب $Y(s)$ به دست می‌آوریم $Y(s)=\frac{2}{s-2}$ یا $Y(s)=-1-\frac{2}{s-2}$. در نتیجه جواب‌های معادلهٔ انتگرال داده شده $y=2e^{2t}$ یا $y=-\delta(t)-2e^{2t}$ است. $\square$