تاریخ: ۸۵/۸/۱۸

شماره:

پیوست:

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

امتحان میان ترم آنالیز تابعی مقدماتی

۲۲-۴۷۵

نیمسال اول ۸۶-۸۵

سؤال ۱. فرض کنید H فضای هیلبرت روی $\mathbb{C}$ (یا $\mathbb{R}$) باشد و $p \in H$. ثابت کنید اگر A زیرمجموعه‌ای ناتهی، بسته و محدب از H باشد، آنگاه نقطهٔ منحصر به فرد $q \in A$ وجود دارد که $\|p-q\| = \inf\{\|p-a\| : a \in A\}$. (۱۰ نمره)

سؤال ۲. فرض کنید X و Y به ترتیب فضاهای خطی نُرم‌دار و باناخ روی $\mathbb{C}$ (یا $\mathbb{R}$) باشند. W را نیز زیرفضای خطی و چگال از X درنظر بگیرید. ثابت کنید اگر $S \in B(W,Y)$، آنگاه $T \in B(X,Y)$ وجود دارد که $T|_W = S$ و $\|T\| = \|S\|$. (۱۰ نمره)

سؤال ۳. صورت قضیهٔ Riesz – Fréchet را بنویسید و آنرا ثابت کنید. (۱۰ نمره)

سؤال ۴. فرض کنید X فضای خطی نُرم‌دار روی $\mathbb{C}$ (یا $\mathbb{R}$) باشد. ثابت کنید اگر زیرفضای خطی Y از X باز باشد، آنگاه $Y = X$. (۵ نمره)

سؤال ۵. فرض کنید H فضای هیلبرت جداپذیر روی $\mathbb{C}$ (یا $\mathbb{R}$) و X زیرفضای خطی و بسته از H باشد. ثابت کنید پایه‌ای راست‌هنجار برای H وجود دارد که فقط شامل اعضایی از X و $X^{\perp}$ است. (۱۵ نمره)

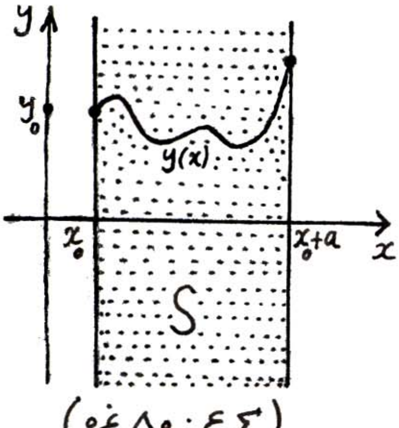
سؤال ۶. فرض کنید H فضای هیلبرت روی $\mathbb{C}$ (یا $\mathbb{R}$) و X زیرفضای خطی و بسته از H باشد. ثابت کنید اگر $f \in X'$، آنگاه $g \in H'$ وجود دارد که $g|_X = f$ و $\|g\| = \|f\|$. (۱۰ نمره)

سؤال ۷. فرض کنید I زیرمجموعه‌ای فشرده از $\mathbb{R}$ و $X = C(I)$ فضای خطی توابع پیوستهٔ $I \to \mathbb{R}$ باشد. ثابت کنید برای $\alpha > 0$ داده شده، $\|\ \|_\alpha : X \to \mathbb{R}$ با تعریف $\|f\|_\alpha := \sup\{|f(x)|e^{-\alpha x} : x \in I\}$ یک نُرم روی X است که X را به فضای باناخ تبدیل می‌کند. (۵ نمره)

سؤال ۸. فرض کنید $a>0$، $L>0$، x_0 و y_0 اعداد حقیقی باشند. قرار دهید $I = [x_0, x_0+a]$ و نوار $S = I \times \mathbb{R}$ را درنظر بگیرید. فرض کنید $f : S \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته روی S باشد که برای هر $(x,y), (x,z) \in S$، $|f(x,y) - f(x,z)| \leq L|y-z|$. ثابت کنید مسألهٔ مقدار اولیهٔ

$$\begin{cases} y' = f(x,y) & : x \in I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

دقیقاً دارای یک جواب است که در سرتاسر I نیز تعریف شده است. (۱۵ نمره)



(مجموع: ۸۰ نمره)