تاریخ : ۸۵/۸/۱۸

شماره :

پیوست :

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

حل مسایل امتحان میان‌ترم آنالیز تابعی مقدماتی

سؤال‌های ۱، ۲ و ۳: قضیهٔ کتاب.

سؤال‌های ۴، ۵ و ۶: مسایل حل شده در کتاب.

سؤال ۷: چون I فشرده است، $\|\ \|_\alpha$ خوش تعریف می‌باشد. بررسی برقراری سه خاصیت اول، دوم و سوم نرم بودن $\|\ \|_\alpha$ نیز سرراست است. اما برای بررسی برقراری نامساوی مثلث، فرض کنید $f,g\in X$ دلخواه باشند. برای هر $x\in I$ می‌توانیم بنویسیم:

$$|(f+g)(x)|e^{-\alpha x}\le |f(x)|e^{-\alpha x}+|g(x)|e^{-\alpha x}\le \|f\|_\alpha+\|g\|_\alpha$$

پس $\|f+g\|_\alpha\le\|f\|_\alpha+\|g\|_\alpha$ که نشان می‌دهد $\|\ \|_\alpha$ یک نرم روی X است. اکنون فرض کنید $k>0$ و $l>0$ طوری باشند که برای هر $x\in I$، $k\le e^{-\alpha x}\le l$. در این صورت اگر $f\in X$ دلخواه باشد آنگاه برای هر $x\in I$، $k|f(x)|\le|f(x)|e^{-\alpha x}\le l|f(x)|$ و در نتیجه $k\|f\|_\infty\le\|f\|_\alpha\le l\|f\|_\infty$ که $\|\ \|_\infty$ نرم یکنواخت متداول X است. پس $\|\ \|_\alpha$ و $\|\ \|_\infty$ هم‌ارزند. چون X با نرم $\|\ \|_\infty$ فضای باناخ است، با نرم $\|\ \|_\alpha$ نیز فضای باناخ خواهد بود. $\square$

سؤال ۸: فرض کنید $X=C(I)$ فضای خطی توابع پیوستهٔ $I\to\mathbb{R}$ باشد. کافی است ثابت کنیم معادلهٔ انتگرال

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))\,dt\ ,\quad x\in I$$

دقیقاً دارای یک جواب در X است. برای این منظور نیز کافی است ثابت کنیم که نگاشت $T:X\to X$ که y را به $T(y)$ می‌نگارد که در آن $T(y)$ به صورت

$$T(y)(x):=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))\,dt\ ,\quad x\in I$$

تعریف می‌شود دقیقاً یک نقطهٔ ثابت دارد. X را با نرم $\|\ \|_\alpha$ $(\alpha>0)$ در نظر می‌گیریم. بنابر سؤال قبل، X با این نرم یک فضای باناخ است. برای هر $y,z\in X$ و $x\in I$ داریم:

$$\begin{aligned}
&|(T(y)-T(z))(x)|e^{-\alpha x}\\
&=|T(y)(x)-T(z)(x)|e^{-\alpha x}\\
&=\left|\int_{x_0}^{x}\big(f(t,y(t))-f(t,z(t))\big)dt\right|e^{-\alpha x}\\
&\le\left(\int_{x_0}^{x}|f(t,y(t))-f(t,z(t))|\,dt\right)e^{-\alpha x}\\
&\le\left(\int_{x_0}^{x}L\,|y(t)-z(t)|\,dt\right)e^{-\alpha x}\\
&=\left(\int_{x_0}^{x}L\,|(y-z)(t)|\,e^{-\alpha t}e^{\alpha t}\,dt\right)e^{-\alpha x}\\
&\le\left(\int_{x_0}^{x}L\,\|y-z\|_\alpha e^{\alpha t}\,dt\right)e^{-\alpha x}\\
&=L\,\|y-z\|_\alpha\left(\tfrac{1}{\alpha}(e^{\alpha x}-e^{\alpha x_0})\right)e^{-\alpha x}\\
&=L/\alpha\,\|y-z\|_\alpha\left(1-e^{-\alpha(x-x_0)}\right)\\
&\le L/\alpha\,\|y-z\|_\alpha.
\end{aligned}$$

در نتیجه $\|T(y)-T(z)\|_\alpha\le L/\alpha\,\|y-z\|_\alpha$. اکنون با فرض $\alpha=2L$ داریم:

$$\|T(y)-T(z)\|_{2L}\le\tfrac{1}{2}\|y-z\|_{2L}.$$

پس T یک نگاشت انقباضی روی فضای باناخ X (با نرم $\|\ \|_{2L}$) است و لذا بنابر قضیهٔ نقطهٔ ثابت باناخ دقیقاً یک نقطهٔ ثابت دارد. $\square$