



بی‌تغالی
امتحان پایان ترم آنالیز تابعی مقدماتی

۲۲-۴۷۵

نیمسال اول ۸۶-۸۵

تاریخ: ۲۳/۱۰/۸۵

شماره:

پوست:

سؤال ۱. صورت قضیه نگاشت باز را به طور دقیق بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۲. فرض کنید H فضای هیلبرت فمطل و K فضای باناخ حقیقی متشکل از تمام عملگرهای خطی خودالمحاق در $B(H)$ باشد. ثابت کنید اگر $S \in K$ مثبت باشد، آنگاه رتبه دوم مثبت R از S وجود دارد که حد دنباله‌ای از چند جمله‌ای بر حسب S است. به علاوه ثابت کنید اگر Q رتبه دوم مثبت دلخواهی از S باشد، آنگاه $R=Q$.

سؤال ۳. فرض کنید H فضای هیلبرت فمطل و $T: H \rightarrow H$ عملگر خطی فشرده‌ای باشد. ثابت کنید اگر $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ، آنگاه $\text{Im}(T - \lambda I)$ زیرفضای خطی بسته از H است.

سؤال ۴. فرض کنید X فضای باناخ روی \mathbb{C} (یا \mathbb{R}) و $\{T_n\}$ دنباله‌ای از عملگرهای خطی وارونپذیر در $B(X)$ باشد که به $T \in B(X)$ همگراست. ثابت کنید اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $\|T_n^{-1}\| < 1$ ، آنگاه T وارونپذیر است.

سؤال ۵. فرض کنید H فضای هیلبرت فمطل و $S \in B(H)$ عملگر خطی خودالمحاقی باشد با این ویژگی که $\|S\| < 1$. ثابت کنید عملگرهای $S \pm i(I - S^2)^{1/2}$ خوش تعریف و یکانی هستند.

سؤال ۶. فرض کنید H فضای هیلبرت فمطل نامتناهی بُعد و $\{e_n\}$ و $\{f_n\}$ دو دنباله راست هنجار در H باشند. فرض کنید $\{\alpha_n\}$ دنباله‌ای در \mathbb{C} باشد و عملگر خطی $T: H \rightarrow H$ را با ضابطه $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x | e_n) f_n$ تعریف کنید. با ذکر دلیل، شرطی لازم و کافی برای فشرده بودن T بنویسید.

سؤال ۷. صورت قضیه نمودار بسته را بنویسید و با ذکر دلیل مثبت کنید که آیا می‌توان شرط باناخ بودن فضا را حذف کرد یا خیر.

سؤال ۸. فرض کنید X فضای ضرب داخلی روی \mathbb{C} (یا \mathbb{R}) باشد و $T \in B(X)$. اگر برای هر $x \in X$ ، $(T(x) | x) = 0$ ، با ذکر دلیل مثبت کنید که آیا می‌توان نتیجه گرفت $T=0$ یا خیر.

توزیع نمره: سؤال‌های ۳ و ۴: ۱۰ نمره، سؤال‌های ۱، ۲، ۵ و ۶: ۱۵ نمره، سؤال‌های ۷ و ۸: ۲۰ نمره.

(مجموع: ۱۲۰ نمره)