



تاریخ امتحان: ۸/۹/۸۶  
مدت امتحان: ۳/۵ ساعت

امتحان میان‌ترم جبر خطی ۱

۲۲ - ۲۵۵

نیمسال اول ۸۷-۸۶

توجه: در این امتحان منظور از میدان  $F$ ، میدان  $\mathbb{R}$  یا میدان  $\mathbb{C}$  می‌باشد.

سؤال ۱. دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 + x_4 + x_5 = 4 \end{cases}$$

به کمک روش حذفی گاوس و نیز استفاده از ماتریس تحویل شده سطری پلکانی، جواب عمومی دستگاه بالا را به دست آورید و سپس یک پایه برای فضای جواب دستگاه همگن متناظر با دستگاه بالا ارائه کنید.

سؤال ۲. فرض کنید  $V = P_2(\mathbb{R})$  فضای چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب حقیقی باشد که درجه آنها کمتر از یا مساوی ۳ است. برای  $p \in V$  تابع  $f_p: V \rightarrow \mathbb{R}$  را با ضابطه  $f_p(q) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$  تعریف کنید.

الف) نشان دهید  $f_p$  تابع خطی روی  $V$  است.

ب) تابع  $T: V \rightarrow V^*$  را با ضابطه  $T(p) = f_p$  تعریف کنید. نشان دهید  $T$  تبدیل خطی است.

ج) ماتریس  $[T]_{\beta}^{\beta^*}$  را که در آن  $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$  پایه مرتب استاندارد  $V$  و  $\beta^*$  پایه مرتب دوگان  $V$  است پیدا کنید.

سؤال ۳. فرض کنید  $P_2(\mathbb{R})$  فضای چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب حقیقی باشد که درجه آنها کمتر از یا مساوی ۳ است و  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  را فضای ماتریس‌های  $2 \times 2$  با درآیه‌های حقیقی در نظر بگیرید. تابع  $T: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  را با ضابطه زیر تعریف کنید:

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(-1) & p(2) \end{pmatrix}.$$

الف) نشان دهید  $T$  تبدیل خطی است.

ب) نشان دهید  $T$  وارون پذیر است و به کمک عملیات سطری مقدماتی ضابطه  $T^{-1}$  را محاسبه کنید.

سؤال ۴. فرض کنید  $V$  فضای برداری روی میدان  $F$  باشد و  $S$  یک مجموعه مولد متناهی برای  $V$  ثابت کنید  $S$  شامل پایه‌ای از  $V$  است.

**سؤال ۵.** فرض کنید  $V$  و  $W$  فضاهای برداری روی میدان  $F$  باشند و  $T: V \rightarrow W$  را تبدیل خطی در نظر بگیرید. ثابت کنید  $T$  تابعی یک به یک است اگر و فقط اگر تبدیل خطی  $U: W \rightarrow V$  موجود باشد با این ویژگی که  $UT = 1_V$ . ( $1_V$  تبدیل خطی همانی روی  $V$  است.)

**سؤال ۶.** فرض کنید  $V$  فضای برداری روی میدان  $F$  و  $T: V \rightarrow V$  تبدیل خطی باشد. هم چنین  $N(T)$  را فضای پوچ  $T$  و  $R(T)$  را برد  $T$  در نظر بگیرید.

الف) ثابت کنید  $T^2 = 0$  اگر و فقط اگر  $R(T) \subseteq N(T)$ .

ب) اگر  $V$  فضایی  $n$  بعدی باشد و  $T^2 = 0$  آنگاه پوچی  $T$  حداقل برابر با چند می تواند باشد و چرا؟ (پوچی  $T$  بعد فضای پوچ  $T$  است.)

**سؤال ۷.** فرض کنید  $V$  فضای برداری  $n$  بعدی روی میدان  $F$ ،  $\beta$  پایه ای مرتب برای  $V$  و  $T: V \rightarrow V$  تبدیل خطی ناصفر باشد. ثابت کنید اگر برای هر  $v \in V$  مجموعه  $\{v, T(v)\}$  وابسته خطی باشد آنگاه  $\lambda \in F$ ،  $\lambda \neq 0$  وجود دارد که  $[T]_{\beta} = \lambda I_n$ . ( $I_n$  ماتریس همانی  $n \times n$  روی  $F$  است.)

**سؤال ۸.** هر یک از احکام زیر را که درست هستند ثابت کنید و برای هر کدام که نادرست هستند مثالی ناقض ارائه کنید.

الف) فرض کنید  $A$  ماتریسی  $m \times p$  و  $B$  ماتریسی  $p \times n$  با درآیه های در میدان  $F$  باشد. اگر ستون های  $B$  وابسته خطی باشند آنگاه ستون های  $AB$  نیز وابسته خطی هستند.

ب) فرض کنید  $A$  ماتریسی  $m \times n$  و  $B$  و  $C$  ماتریس هایی  $n \times m$  با درآیه های در میدان  $F$  باشند. اگر  $AB = I_m$  و  $CA = I_n$  آنگاه  $m = n$  و  $B = C$ . ( $I_m$  و  $I_n$  به ترتیب ماتریس های همانی  $m \times m$  و  $n \times n$  روی  $F$  هستند.)

ج) فرض کنید  $V$  و  $W$  فضاهای برداری متناهی بعد روی میدان  $F$  باشند و  $\dim V > \dim W$ . اگر  $T: V \rightarrow W$  تبدیل خطی بوده و  $w$  در برد  $T$  واقع باشد آنگاه نامتناهی  $v \in V$  وجود دارد که  $T(v) = w$ .

د) فرض کنید  $V$  و  $W$  فضاهای برداری متناهی بعد روی میدان  $F$  باشند و  $\dim V < \dim W$ . اگر  $T: V \rightarrow W$  تبدیل خطی بوده و  $w$  در برد  $T$  واقع باشد آنگاه دقیقاً یک  $v \in V$  وجود دارد که  $T(v) = w$ .

**توزیع نمره.** سؤال ۱: ۱۵ نمره، سؤال ۲: الف) ۱ نمره، ب) ۲ نمره، ج) ۱۲ نمره، سؤال ۳: الف) ۳ نمره، ب) ۱۲ نمره، سؤال ۴: ۱۰ نمره، سؤال ۵: ۱۰ نمره، سؤال ۶: الف) ۵ نمره، ب) ۵ نمره، سؤال ۷: ۱۰ نمره، سؤال ۸: الف) ۳ نمره، ب) ۴ نمره، ج) ۵ نمره، د) ۳ نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره