بسمه تعالی

تاریخ: ۸۶/۹/۸
شماره:
پیوست:

دانشگاه صنعتی شریف

حل مسایل امتحان میان ترم جبر خطی ۱

سؤال ۱: ماتریس افزودهٔ دستگاه داده شده به صورت زیر است:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

با انجام عملیات سطری مقدماتی به روشی خاص که روش حذفی گاوس نامیده می‌شود ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی زیر به دست می‌آید:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

ماتریس بالا، ماتریس افزودهٔ دستگاه زیر است که بنابر قضیهٔ خوانده شده با دستگاه داده شده هم‌ارز می‌باشد.

$$\begin{cases} x_1 + x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 = -1 \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

اکنون با فرض $x_3=t_1$ و $x_5=t_2$ $(t_1,t_2\in\mathbb{R})$ جواب عمومی دستگاه داده شده به دست می‌آید:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

بنابر قضیهٔ خوانده شده مجموعهٔ زیر نیز یک پایه برای فضای جواب دستگاه همگن متناظر با دستگاه داده شده است:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \square$$

سؤال ۲: الف) برای $q_1,q_2\in V$ و $\lambda\in\mathbb{R}$ می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} f_p(q_1+\lambda q_2) &= \int_0^1 p(x)\left(q_1(x)+\lambda q_2(x)\right)dx \\ &= \int_0^1 p(x)q_1(x)\,dx + \lambda\int_0^1 p(x)q_2(x)\,dx \\ &= f_p(q_1)+\lambda f_p(q_2), \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد f_p تابعک خطی روی V است. $\square$

ب) برای $p_1,p_2,q\in V$ و $\lambda\in\mathbb{R}$ می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} f_{p_1+\lambda p_2}(q) &= \int_0^1\left(p_1(x)+\lambda p_2(x)\right)q(x)\,dx \\ &= \int_0^1 p_1(x)q(x)\,dx + \lambda\int_0^1 p_2(x)q(x)\,dx \\ &= f_{p_1}(q)+\lambda f_{p_2}(q) \\ &= (f_{p_1}+\lambda f_{p_2})(q). \end{aligned}$$

پس $f_{p_1+\lambda p_2}=f_{p_1}+\lambda f_{p_2}$ یا $T(p_1+\lambda p_2)=T(p_1)+\lambda T(p_2)$ که نشان می‌دهد T تبدیل خطی است. $\square$

ج) فرض کنید $p_i=x^i$ $(0\leq i\leq 3)$، در نتیجه $\beta=\{p_0,p_1,p_2,p_3\}$. قرار دهید $\beta^*=\{g_0,g_1,g_2,g_3\}$ و فرض کنید $[T]_\beta^{\beta^*}=A$.
در نتیجه برای $0\leq j\leq 3$ می‌توانیم بنویسیم $T(p_j)=\sum_{k=0}^{3}A_{kj}\,g_k$.
اثر دو طرف تساوی اخیر بر p_i $(0\leq i\leq 3)$ به دست می‌دهد $T(p_j)(p_i)=\sum_{k=0}^{3}A_{kj}\,g_k(p_i)$ یا $f_{p_j}(p_i)=A_{ij}$. پس $A_{ij}=\int_0^1 x^{i+j}\,dx=\frac{1}{1+i+j}$ و در نتیجه

$$[T]_\beta^{\beta^*}=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix}. \square$$

سؤال ۳: الف) برای $p,q\in P_3(\mathbb{R})$ و $\lambda\in\mathbb{R}$ می‌توانیم بنویسیم

$$T(p+\lambda q)=\begin{pmatrix} p(0)+\lambda q(0) & p(1)+\lambda q(1) \\ p(-1)+\lambda q(-1) & p(2)+\lambda q(2) \end{pmatrix}$$

دانشگاه صنعتی شریف

بسمه تعالی

تاریخ: ۸۶/۹/۸

شماره:

پیوست:

$$= \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(-1) & p(2) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} q(0) & q(1) \\ q(-1) & q(2) \end{pmatrix}$$

$$= T(p) + \lambda T(q),$$

که نشان می‌دهد T تبدیل خطی است. $\square$

ب) فرض کنید β و γ به ترتیب پایه‌های مرتب استانده $P_3(\mathbb{R})$ و $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ باشند. در این صورت

$$A = [T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

اکنون با عملیات سطری مقدماتی می‌توانیم ماتریس افزوده $(A \mid I_4)$ را به صورت $(I_4 \mid B)$ تبدیل کنیم که در آن

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

پس بنابر قضیهٔ خوانده شده A وارون‌پذیر است و $A^{-1} = B$. این نیز نشان می‌دهد که T وارون‌پذیر است و $[T^{-1}]_\gamma^\beta = B$. اکنون می‌توانیم بنویسیم

$$\left[T^{-1}\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}\right]_\beta = B \left[\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}\right]_\gamma$$

$$= B \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ -\frac{1}{2}a_0 + a_1 - \frac{1}{3}a_2 - \frac{1}{6}a_3 \\ -a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 \\ \frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{6}a_2 + \frac{1}{6}a_3 \end{pmatrix},$$

که ضابطهٔ $T^{-1}: M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ را به دست می‌دهد:

$$T^{-1}\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix} = a_0 + \left(-\tfrac{1}{2}a_0 + a_1 - \tfrac{1}{3}a_2 - \tfrac{1}{6}a_3\right)x + \left(-a_0 + \tfrac{1}{2}a_1 + \tfrac{1}{2}a_2\right)x^2 + \left(\tfrac{1}{2}a_0 - \tfrac{1}{2}a_1 - \tfrac{1}{6}a_2 + \tfrac{1}{6}a_3\right)x^3.$$

$\square$

سؤال ۴: قضیهٔ کتاب. $\square$

سؤال ۵: $(\Leftarrow)$ بنابر قضیهٔ خوانده شده V دارای پایه است، مثلاً پایهٔ β. یک به یک بودن T نتیجه می‌دهد که $S = \{T(v) \mid v \in \beta\}$ زیرمجموعه‌ای مستقل خطی در W است: زیرا با فرض $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(v_i) = 0$، $v_i \in \beta$، $\lambda_i \in F$، $1 \leqslant i \leqslant n$، می‌توان نتیجه گرفت که $T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = 0$ یا اینکه $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \in N(T)$. اما $N(T) = \{0\}$ و لذا $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$ که پایه بودن β نتیجه می‌دهد که $\lambda_i = 0$، $1 \leqslant i \leqslant n$. پس S زیرمجموعه‌ای مستقل خطی در W است و در نتیجه بنابر قضیهٔ خوانده شده پایهٔ γ از W موجود است که $S \subseteq \gamma$. اکنون می‌خواهیم تبدیل خطی $U: W \to V$ را تعریف کنیم که کافی است روی اعضای پایهٔ γ از W تعریف شود. این کار را به صورت زیر انجام می‌دهیم:

$$U(w) = \begin{cases} v & : w \in S \ (w = T(v),\ v \in \beta) \\ 0 & : w \in \gamma \setminus S \end{cases}$$

حال $UT: V \to V$ تبدیل خطی است و چون برای هر عضو پایهٔ β از V مثل v داریم

$$UT(v) = U(T(v)) = v = I_V(v),$$

به دست می‌آوریم $UT = I_V$. $\square$

$(\Rightarrow)$ برای هر $v_1, v_2 \in V$، $T(v_1) = T(v_2)$ نتیجه می‌دهد که $U(T(v_1)) = U(T(v_2))$، $UT(v_1) = UT(v_2)$، $I_V(v_1) = I_V(v_2)$

یا $v_1=v_2$ که ایجاب می‌کند T یک به یک است. □

سؤال ۶: الف) $(\Leftarrow)$ فرض کنید $w\in R(T)$. پس $v\in V$ موجود است که $w=T(v)$ و در نتیجه می‌توانیم بنویسیم $T(w)=T(T(v))=T^2(v)=0$ که نتیجه می‌دهد $w\in N(T)$. یعنی اینکه $R(T)\subseteq N(T)$. □

$(\Rightarrow)$ برای هر $v\in V$، $T(v)\in R(T)$ و لذا $T(v)\in N(T)$. پس $T(T(v))=0$ یا $T^2(v)=0$ که نتیجه می‌دهد $T^2=0$. □

ب) چون $T^2=0$ پس بنابر قسمت (الف)، $R(T)\subseteq N(T)$، و لذا پوچی $T \geqslant$ رتبهٔ T. اکنون بنابر قضیهٔ بعد،

$$n = \text{پوچی } T + \text{رتبهٔ } T \leqslant 2\times(\text{پوچی } T),$$

و در نتیجه پوچی $T \geqslant \frac{n}{2}$. یعنی اینکه پوچی T حداقل برابر با $\frac{n}{2}$ برای n های زوج و $[\frac{n}{2}]+1$ برای n های فرد می‌تواند باشد. □

سؤال ۷: فرض کنید $\beta=\{v_1,\dots,v_n\}$. چون برای هر i، $1\leqslant i\leqslant n$، $\{v_i,T(v_i)\}$ وابستهٔ خطی است پس $\lambda_i\in F$ موجود است که $T(v_i)=\lambda_i v_i$. اکنون برای $i\neq j$ دلخواه، $\{v_i+v_j, T(v_i+v_j)\}$ نیز وابستهٔ خطی است پس $\lambda_{ij}\in F$ موجود است که $T(v_i+v_j)=\lambda_{ij}(v_i+v_j)$. در نتیجه داریم $T(v_i)+T(v_j)=\lambda_{ij}v_i+\lambda_{ij}v_j$ یا $\lambda_i v_i+\lambda_j v_j=\lambda_{ij}v_i+\lambda_{ij}v_j$. اکنون پایه بودن β ایجاب می‌کند $\lambda_i=\lambda_j=\lambda_{ij}$. در نتیجه برای هر i، $1\leqslant i\leqslant n$، $T(v_i)=\lambda v_i$ (برای یک $\lambda\in F$) که نتیجه می‌دهد

$$[T]_\beta=\lambda I_n.$$

چون T ناصفر است، λ نیز چنین است. □

سؤال ۸: الف) درست است: اگر ستون‌های B را $b_1,\dots,b_n$ فرض کنیم، ستون‌های AB عبارتند از $Ab_1,\dots,Ab_n$. چون ستون‌های B وابستهٔ خطی اند پس $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in F$ موجودند که لااقل یکی از آنها ناصفر است و $\lambda_1b_1+\dots+\lambda_nb_n=0$. پس $\lambda_1(Ab_1)+\dots+\lambda_n(Ab_n)=0$ که نشان می‌دهد ستون‌های AB نیز وابستهٔ خطی اند. □

ب) درست است: می‌توانیم بنویسیم

$$m=\text{rank}(I_m)=\text{rank}(AB)\leqslant\text{rank}(A)\leqslant m,$$

$$n=\text{rank}(I_n)=\text{rank}(CA)\leqslant\text{rank}(A)\leqslant n.$$

بنابر اولی $\text{rank}(A)=m$ و بنابر دومی $\text{rank}(A)=n$. در نتیجه $m=n$. هم‌چنین می‌توانیم بنویسیم

$$B=I_nB=(CA)B=C(AB)=CI_m=C. \quad □$$

ج) درست است: بنابر قضیهٔ بعد می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}\dim V &= \dim N(T)+\dim R(T)\\ &\leqslant \dim N(T)+\dim W\\ &< \dim N(T)+\dim V,\end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد $\dim N(T)>0$ و لذا $N(T)$ نامتناهی عضو دارد. چون w در برد T واقع است پس $v'\in V$ موجود است که $T(v')=w$. اکنون نامتناهی عضو به شکل $v=v'+n$، $n\in N(T)$، این ویژگی را دارد که

$$T(v)=T(v'+n)=T(v')+T(n)=w+0=w. \quad □$$

د) نادرست است: کافی است تبدیل خطی $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ را با ضابطهٔ $T(v)=0$ در نظر بگیریم و فرض کنیم $w=0$. □