به‌نام خدا

دانشکدهٔ علوم ریاضی

امتحان پایان‌ترم جبر خطی ۱

۲۲ – ۲۵۵

نیمسال اوّل ۸۷–۸۶

تاریخ امتحان: ۸۶/۱۰/۲۵

مدّت امتحان: ۳/۵ ساعت

توجه: در این امتحان منظور از میدان F، میدان $\mathbb{R}$ یا میدان $\mathbb{C}$ می‌باشد.

سؤال ۱. فرض کنید $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. ماتریس وارون پذیر P و ماتریس قطری D را چنان پیدا کنید که $P^{-1}AP = D$.

سؤال ۲. فرض کنید V فضای برداری ۱۰ بعدی روی میدان F باشد و W_1 و W_2 دو زیر فضای V با این ویژگی که $W_1 \subseteq W_2$، $\dim W_1 = 3$ و $\dim W_2 = 6$. هم‌چنین $\mathcal{L}(V)$ را فضای برداری متشکل از تمام عملگرهای خطی $T : V \to V$ در نظر بگیرید و فرض کنید L زیر فضایی از $\mathcal{L}(V)$ باشد متشکل از اعضایی که W_1 و W_2 زیر فضاهای پایای آنها هستند. بعد زیر فضای L را محاسبه کنید. (نیازی به اثبات زیر فضا بودن L نیست.)

سؤال ۳. فرض کنید A و B ماتریس‌هایی $n \times n$ با درآیه‌های در میدان F باشند. ثابت کنید $\det(AB) = \det(A). \det(B)$.

سؤال ۴. فرض کنید $\mathrm{M}_{n\times n}(F)$ فضای ماتریس‌های $n \times n$ با درآیه‌های در میدان F باشد. عملگر خطی $T : \mathrm{M}_{n\times n}(F) \to \mathrm{M}_{n\times n}(F)$ را با ضابطهٔ $T(A) = A + A^t$ در نظر بگیرید. (نیازی به اثبات خطی بودن T نیست.)

الف) نشان دهید برای هر ماتریس متقارن $B \in \mathrm{M}_{n\times n}(F)$، ماتریس $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(F)$ وجود دارد که $T(A) = B$. سپس برد T، یعنی $R(T)$ و نیز فضای پوچ T، یعنی $N(T)$ را به‌طور صریح مشخص کنید.

ب) نشان دهید $\mathrm{M}_{n\times n}(F) = R(T) \oplus N(T)$.

ج) رتبهٔ T، یعنی $\dim R(T)$ و پوچی T، یعنی $\dim N(T)$ را محاسبه کنید.

د) نشان دهید T قطری شدنی است.

ه) $\det(T)$ و $\mathrm{tr}(T)$ را محاسبه کنید.

و) مقادیر ویژهٔ T را به دست آورید و فضاهای ویژهٔ T را به‌طور صریح مشخص کنید.

سؤال ۵. فرض کنید A ماتریسی 3×3 با درآیه‌های در $\mathbb{C}$ باشد با این ویژگی که $\det(A) = 1$ و $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^{-1}) = 0$. ثابت کنید $A^3 = I$. (I ماتریس همانی 3×3 روی $\mathbb{C}$ است.)

سؤال ۶. فرض کنید $\mathrm{M}_{n\times n}(F)$ فضای ماتریس‌های $n\times n$ با درآیه‌های در میدان F باشد و $A\in \mathrm{M}_{n\times n}(F)$. ثابت کنید اگر برای هر $B\in \mathrm{M}_{n\times n}(F)$ داشته باشیم $\det(A+B)=\det(B)$ آنگاه $A=o$.
(o ماتریس صفر $n\times n$ روی F است.)

سؤال ۷. فرض کنید $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. ماتریس وارون پذیر P و ماتریس بلوکی ژردان J را چنان پیدا کنید که $P^{-1}AP=J$.

سؤال ۸. فرض کنید V فضای ضرب داخلی متناهی بعد روی میدان F و $a\in V$ عضوی یکه باشد. تابع $T:V\to V$ را با ضابطهٔ $T(x)=x+\langle x,a\rangle a$ در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید T عملگر خطی است.

ب) $\mathrm{tr}(T)$ را محاسبه کنید.

توزیع نمره. سؤال‌های ۱، ۲، ۳، ۵، ۶ و ۷ هرکدام ۱۰ نمره، سؤال ۴: الف) ۵ نمره، ب) ۳ نمره، ج) ۴ نمره، د) ۶ نمره، ه) ۲ نمره، و) ۵ نمره، سؤال ۸: الف) ۳ نمره، ب) ۱۲ نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره