تاریخ: ۸۶/۱۰/۲۵

شماره:

پیوست:

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

حل مسایل امتحان پایان ترم جبر خطی ۱

سؤال ۱: چند جمله‌ای مشخصهٔ A برابر است با

$$p(t)=\det(A-tI)=-t(t-1)^2$$

که مقادیر ویژهٔ $\lambda_1=0$ و $\lambda_2=1$ را برای A به دست می‌دهد. امّا

$$E_{\lambda_1}=N(T)=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\},$$

$$E_{\lambda_2}=N(T-1)=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\},$$

و در نتیجه $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ و $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

توجه می‌کنیم که داریم $P^{-1}AP=D$. □

سؤال ۲: پایهٔ مرتب $\beta_1=\{v_1,v_2,v_3\}$ را برای W_1 در نظر می‌گیریم و ابتدا آن را به پایهٔ مرتب $\beta_2=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$ برای W_2 و سپس به پایهٔ مرتب

$$\beta=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9,v_{10}\}$$

برای V گسترش می‌دهیم. در این صورت اگر $T\in L$، آنگاه

$$[T]_\beta=\left(\begin{array}{ccc|ccc|cccc}
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
\hline
 & & & * & * & * & * & * & * & * \\
 & & & * & * & * & * & * & * & * \\
 & & & * & * & * & * & * & * & * \\
\hline
 & & & & & & * & * & * & * \\
 & 0 & & & & & * & * & * & * \\
 & & & & & & * & * & * & * \\
 & & & & & & * & * & * & *
\end{array}\right).$$

پس L با فضای ماتریس‌هایی به شکل بالا یک‌ریخت است که دارای پایهٔ

$$\{E^{ij}\mid 1\le i\le 3,\ 1\le j\le 3\}\cup\{E^{ij}\mid 1\le i\le 6,\ 4\le j\le 6\}\cup\{E^{ij}\mid 1\le i\le 10,\ 7\le j\le 10\}$$

می‌باشد و لذا $\dim L=9+18+40=67$. □

سؤال ۳: قضیهٔ کتاب. □

سؤال ۴: الف) برای ماتریس متقارن داده شدهٔ $B\in M_{n\times n}(F)$، کافی است قرار دهیم $A:=\frac{1}{2}B$. در این صورت

$$T(A)=A+A^t=\tfrac12B+\left(\tfrac12B\right)^t=\tfrac12B+\tfrac12B=B.$$

در نتیجه

$$R(T)=\{T(A)\mid A\in M_{n\times n}(F)\}=\text{زیرفضای ماتریس‌های متقارن}$$

$$N(T)=\{A\in M_{n\times n}(F)\mid A^t=-A\}=\text{زیرفضای ماتریس‌های پادمتقارن}.\ \square$$

ب) چون هر ماتریس را می‌توان به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پادمتقارن نوشت و چون O تنها ماتریسی است که هم متقارن و هم پادمتقارن است، پس $M_{n\times n}(F)=R(T)\oplus N(T)$. □

ج) رتبهٔ T که بُعد زیرفضای ماتریس‌های متقارن در $M_{n\times n}(F)$ است برابر است با $\frac12n(n+1)$. در نتیجه پوچی T که بُعد زیرفضای ماتریس‌های پادمتقارن در $M_{n\times n}(F)$ است برابر خواهد بود با $n^2-\frac12n(n+1)=\frac12n(n-1)$. □

د) پایهٔ مرتب $\beta_1=\{A_1,\dots,A_r\}$ را برای $R(T)$ و پایهٔ مرتب $\beta_2=\{B_1,\dots,B_s\}$ را برای $N(T)$ در نظر بگیرید که در آن $r=\frac12n(n+1)$ و $s=\frac12n(n-1)$. در این صورت $\beta=\beta_1\cup\beta_2$ پایه‌ای مرتب برای $M_{n\times n}(F)$ است و

$$[T]_\beta=\left(\begin{array}{c|c}2I_r&0\\\hline 0&0\end{array}\right)$$

که نشان می‌دهد T قطری‌شدنی است. □

ه) $\det(T)=\begin{cases}2 & :n=1\\0 & :n\geq 2\end{cases}$ و $tr(T)=2r=n(n+1)$. □

و) حالت $n=1$ بدیهی است. با فرض $n\geq2$، T دو مقدار ویژه دارد: $\lambda_1=2$ با تکرر جبری $\frac12n(n+1)$ و $\lambda_2=0$ با تکرر جبری $\frac12n(n-1)$. هم‌چنین

$$E_{\lambda_1}=N(T-2I)=\{A\in M_{n\times n}(F)\mid A+A^t-2A=0\}$$

$$=\{A\in M_{n\times n}(F)\mid A^t=A\}$$

$$=\text{زیرفضای ماتریس‌های متقارن},$$

$$E_{\lambda_2}=N(T)=\text{زیرفضای ماتریس‌های پادمتقارن}.\ \square$$

سؤال ۵: فرض کنید λ_1، λ_2 و λ_3 سه مقدار ویژهٔ (نه لزوماً تمایز) A باشند. در این صورت $p(t)=(\lambda_1-t)(\lambda_2-t)(\lambda_3-t)$ چندجمله‌ای مشخصهٔ A می باشد و نیز با توجه به فرض به دست می آوریم $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$، $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1$ و $\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_3}=0$. تساوی سوم به تساوی $\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3=0$ تبدیل می شود. با استفاده از این تساوی‌ها، چندجمله‌ای مشخصهٔ A به $p(t)=-t^3+1$ تبدیل می شود که قضیهٔ کیلی-هامیلتون ایجاب می کند که $-A^3+I=0$ یا $A^3=I$. □

سؤال ۶: فرض کنید رتبهٔ ماتریس A برابر با r باشد. اگر قرار دهیم $B=0$، آنگاه فرض مسأله نتیجه می دهد که $\det(A)=0$ که ایجاب می کند A وارون‌پذیر نمی باشد و لذا $r<n$. اکنون فرض کنید $r>0$. در این صورت بنابر قضیهٔ خوانده شده ماتریس‌های وارون‌پذیر $n\times n$ مثل E و F وجود دارند که

$$EAF=\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right).$$

قرار می دهیم

$$B:=E^{-1}\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{n-r}\end{array}\right)F^{-1}$$

که با توجه به اینکه $r<n$، ناصفر است. در نتیجه بنابر فرض مسأله $\det(A+B)=\det(B)$. اما $\det(B)=0$، لیکن

$$\det(A+B)=\det\left(E^{-1}\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right)F^{-1}+E^{-1}\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{n-r}\end{array}\right)F^{-1}\right)$$
$$=\det(E^{-1}F^{-1})\neq 0$$

که تناقض است. پس لزوماً $r=0$ و لذا $A=0$. □

سؤال ۷: چندجمله‌ای مشخصهٔ A برابر است با

$$p(t)=\det(A-tI)=-(t-2)^3$$

و چندجمله‌ای مینیمال A برابر است با $m(t)=(t-2)^2$.
پس فرم جردان A به صورت

$$J=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2\end{array}\right)$$

است. حال بردارهای v_1، v_2 و v_3 را طوری پیدا می کنیم که مستقل خطی باشند و

$$\begin{cases} Av_1=2v_1 \\ Av_2=v_1+2v_2 \\ Av_3=2v_3\end{cases}$$

v_1، v_2 و v_3 را می توان به صورت زیر انتخاب کرد:

$$v_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad v_3=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}.$$

در نتیجه $P=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. توجه می کنیم که داریم $P^{-1}AP=J$. □

سؤال ۸: الف) برای هر $x,y\in V$ و هر $\lambda\in F$،

$$\begin{aligned}T(x+\lambda y)&=x+\lambda y+\langle x+\lambda y, a\rangle a\\ &=x+\lambda y+\left(\langle x,a\rangle+\lambda\langle y,a\rangle\right)a\\ &=x+\langle x,a\rangle a+\lambda\left(y+\langle y,a\rangle a\right)\\ &=T(x)+\lambda T(y),\end{aligned}$$

که ایجاب می کند T خطی است. □

ب) فرض کنید $\dim V=n$. بنابر قضیهٔ گرام-اشمیت $\{a\}$ را می توان به پایهٔ مرتب و متعامد یکهٔ $\beta=\{a,e_2,\dots,e_n\}$ برای V گسترش داد. چون

$$T(a)=a+\langle a,a\rangle a=a+\|a\|^2a=2a,$$

و برای $2\le j\le n$،

$$T(e_j)=e_j+\langle e_j,a\rangle a=e_j+0=e_j,$$

در نتیجه

$$[T]_\beta=\begin{pmatrix}2 & & 0\\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1\end{pmatrix}.$$

پس $tr(T)=2+(n-1)=n+1$. □