



تاریخ امتحان: ۸۶/۹/۱
مدت امتحان: ۳ ساعت

امتحان میان‌ترم گروه‌های خطی

۲۲ - ۲۸۵+

نیمسال اول ۸۶-۸۷

سؤال ۱. فرض کنید $n \geq 2$ عددی طبیعی و F یک میدان باشد. گروه خطی خاص تصویری $\text{PSL}_n(F)$ و هندسه تصویری $P_{n-1}(F)$ را در نظر بگیرید.

الف) ثابت کنید $\text{PSL}_n(F)$ گروهی جایگشتی روی نقاط $P_{n-1}(F)$ می‌باشد که به صورت ۲-انتقالی عمل می‌کند.

ب) ثابت کنید اگر گروه جایگشتی G روی مجموعه Ω به صورت ۲-انتقالی عمل کند آنگاه این عمل اولیه است و نتیجه بگیرید که $\text{PSL}_n(F)$ نیز روی نقاط $P_{n-1}(F)$ به صورت اولیه عمل می‌کند.

ج) فرض کنید $n = 2$ و $|F| > 3$ یا اینکه $n \geq 3$. زیرگروه مشتق گروه خطی خاص $\text{SL}_n(F)$ را به دست آورید و نتیجه بگیرید $\text{PSL}_n(F)' = \text{PSL}_n(F)$.

د) صورت قضیه ایواساوا را به طور دقیق بنویسید و آن را ثابت کنید.

ه) فرض کنید $n = 2$ و $|F| > 3$ یا اینکه $n \geq 3$. ثابت کنید $\text{PSL}_n(F)$ گروهی ساده است.

سؤال ۲. فرض کنید n عددی طبیعی و q توانی از یک عدد اول باشد. ثابت کنید اگر n و $q-1$ نسبت به هم اول باشند آنگاه $\text{GL}_n(q) \cong \mathbb{Z}_{q-1} \times \text{SL}_n(q)$.

سؤال ۳. فرض کنید q توانی از یک عدد اول باشد. ثابت کنید $S_{q+1} \hookrightarrow \text{PSL}_2(q)$ و سپس مقادیری از q را پیدا کنید که $\text{PSL}_2(q) \cong S_{q+1}$.

سؤال ۴. فرض کنید G گروهی متناهی باشد. ثابت کنید عدد طبیعی n و میدان F موجود است که $G \hookrightarrow \text{GL}_n(F)$.

سؤال ۵. فرض کنید q توانی از یک عدد اول باشد. ثابت کنید اگر گروه $\text{PSL}_2(q)$ روی خط تصویری به صورت ۳-انتقالی عمل کند آنگاه q لزوماً توانی از ۲ است.

توزیع نمره. سؤال ۱: الف) ۱۵ نمره، ب) ۱۰ نمره، ج) ۱۵ نمره، د) ۱۲ نمره، ه) ۸ نمره، و بقیه سؤال‌ها هر کدام ۱۰ نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره