



تاریخ امتحان: ۱۷/۱۰/۸۶
مدت امتحان: ۳ ساعت

امتحان پایان ترم گروه‌های خطی

۲۲ - ۲۸۵+

نیمسال اول ۸۷-۸۶

سؤال ۱. صورت قضیه مربوط به بعد فضاهای منتهای بعد هم‌تافته ناتبهگون و نیز تجزیه آنها به صفحات هذلولوی را بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۲. صورت قضیه مربوط به وجود زیر فضای ایزوتروپ با بعد ماکزیمم در فضاهای منتهای بعد هم‌تافته ناتبهگون را بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۳. فرض کنید n عددی طبیعی و q توانی از یک عدد اول باشد. با شمارش زوج‌های هذلولوی در یک فضای هم‌تافته ناتبهگون $2n$ بعدی روی میدان q عضوی، مرتبه گروه $Sp_{2n}(q)$ را محاسبه کنید.

سؤال ۴. ثابت کنید گروه $Sp_4(2)$ با گروه S_6 یک ریخت است.

سؤال ۵. فرض کنید F میدانی q عضوی و $L = F \cup \{\infty\}$ خط تصویری باشد. هم‌چنین فرض کنید

$$S = \left\{ x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \mid a, b, c, d \in F, ad - bc \in F^\square \setminus \{0\} \right\},$$

$$T = \left\{ x \mapsto \frac{ax^3+b}{cx^3+d} \mid a, b, c, d \in F, ad - bc \in F \setminus F^\square \right\},$$

و قرار دهید $M := S \cup T$. در این صورت $M(9)$ زیر گروهی از $PTL_2(9)$ است (نیازی به اثبات این مطلب نمی‌باشد). این گروه را که معمولاً با M_1 نمایش می‌دهند! گروه ماتریس 3×3 می‌نامند.

الف) ثابت کنید M_1 به صورت وفادار روی L عمل می‌کند و نتیجه بگیرید $M_1 \hookrightarrow S_1$.

ب) ثابت کنید عمل M_1 روی L به صورت ۳-انتقالی است.

ج) آیا M_1 با $PGL_2(9)$ یک ریخت است؟ چرا؟

د) آیا M_1 گروهی ساده است؟ چرا؟

ه) آیا M_1 گروهی حلپذیر است؟ چرا؟

سؤال ۶. فرض کنید n عددی طبیعی، F میدان و V فضای برداری n بعدی روی F باشد. منظور از یک

پرچم کامل در V دنباله

$$V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_{n-1} \subsetneq V_n = V$$

از زیرفضاهای ناصفر V است. فرض کنید Ω مجموعه تمام پرچم‌های کامل در V باشد و عمل طبیعی $GL_n(F)$ را روی Ω در نظر بگیرید. این عمل طبیعی به این صورت تعریف می‌شود که برای پرچم کامل $V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_{n-1} \subsetneq V_n = V$ از Ω و $T \in GL_n(F)$ ، تعریف می‌کنیم

$$(V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_{n-1} \subsetneq V_n = V)^T := V_1^T \subsetneq V_2^T \subsetneq \dots \subsetneq V_{n-1}^T \subsetneq V_n^T = V.$$

الف) ثابت کنید این عمل انتقالی است و پایدارسازی یک پرچم کامل را پیدا کنید.

ب) در حالتی که q توانی از یک عدد اول و F میدانی q عضوی باشد، تعداد پرچم‌های کامل در V را محاسبه کنید.

توزیع نمره. سؤال‌های ۱ تا ۴ هر کدام ۱۰ نمره، سؤال ۵: الف) ۵ نمره، ب) ۱۰ نمره، ج) ۱۵ نمره، د) ۵ نمره، ه) ۵ نمره، سؤال ۶: الف) ۱۰ نمره، ب) ۱۰ نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره