



تاریخ امتحان: ۸۷/۲/۱۲

مدت امتحان: ۳ ساعت

امتحان میان‌ترم توابع مختلط ۱

۲۲ - ۳۳۵

نیمسال دوم ۸۶-۸۷

سؤال ۱. صورت قضیه‌ای را که به شرایط لازم کشی-ریمان معروف است بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۲. فرض کنید  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z > 0\}$  نیم‌صفحه بالایی و  $\mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$  قرص باز واحد باشد. با شرح کامل جزئیات، نگاشتی را بیابید که  $\mathbb{H}$  را به طور هم‌مدیس، یک به یک و پوشا بر  $\mathbb{D}$  بنگارد.

سؤال ۳. فرض کنید  $a$  عددی مختلط و  $R$  عددی حقیقی و مثبت باشد و  $C$  را دایره‌ای به مرکز  $a$  و شعاع  $R$  در نظر بگیرید که از سه نقطه متمایز  $z_1, z_2, z_3$  و  $z_4$  در صفحه مختلط می‌گذرد. هم‌چنین  $z$  و  $z^*$  را دو نقطه در صفحه مختلط در نظر بگیرید با این ویژگی که نسبت‌های صلیبی  $(z, z_2, z_3, z_4)$  و  $(z^*, z_2, z_3, z_4)$  مزدوج باشند. ثابت کنید  $z$  و  $z^*$  نسبت به دایره  $C$  معکوس یکدیگرند.

سؤال ۴. فرض کنید تابع  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  با ضابطه  $f(z) = (1-i)\text{Re}(z^2) + (1+i)|z|^2$  داده شده است. مجموعه تمام نقاطی را که تابع  $f$  در آن نقاط مشتق‌پذیر است پیدا کنید و سپس ضابطه  $f'$  را مشخص کنید. هم‌چنین مجموعه تمام نقاطی را که تابع  $f$  در آن نقاط تحلیلی است پیدا کنید.

سؤال ۵. با شرح کامل جزئیات، بزرگترین میدانی را که تابع  $f$  با ضابطه  $f(z) = \text{Log}(z^3 + 1)$  در آن تحلیلی است پیدا کنید.

سؤال ۶. فرض کنید  $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  چندجمله‌ای از درجه  $n$  با ضرایب مختلط باشد با این ویژگی که تمام ریشه‌های آن روی دایره واحد واقع‌اند. ثابت کنید تمام ریشه‌های چندجمله‌ای  $q(z) = zp'(z) - np(z)$  نیز روی دایره واحد واقع‌اند.

سؤال ۷. آیا نگاشتی وجود دارد که میدان  $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 1, |z-2| < 2\}$  را به طور هم‌مدیس، یک به یک و پوشا بر نیم‌صفحه بالایی  $\mathbb{H} = \{w \in \mathbb{C} : \text{Im}w > 0\}$  بنگارد؟ چرا؟

سؤال ۸. شرایطی لازم و کافی را معین کنید که تحت آن شرایط تابع  $u$  با ضابطه  $u(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$  روی  $\mathbb{R}^2$  همساز باشد و سپس تمام مزدوج‌های همساز  $u$  را به دست آورید.

توزیع نمره. سؤال‌های ۱، ۳، ۵، ۷ هرکدام ۱۰ نمره و سؤال‌های ۲، ۴، ۶، ۸ هرکدام ۱۵ نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره