بسمه تعالی

تاریخ : ۸۷/۲/۱۲

شماره :

پیوست :

دانشگاه صنعتی شریف

حل مسایل امتحان میان‌ترم توابع مختلط ۱

سؤال ۴: با فرض $z=x+iy$ ضابطهٔ f به صورت زیر به دست می‌آید:

$$f(z)=(1-i)(x^2-y^2)+(1+i)(x^2+y^2)$$
$$=2x^2+i(2y^2).$$

پس توابع u و v با ضابطه‌های $u(x,y)=2x^2$ و $v(x,y)=2y^2$ به ترتیب قسمت‌های حقیقی و موهومی f هستند. با توجه به اینکه مشتقات پاره‌ای مرتبهٔ اول u و v در $\mathbb{R}^2$ پیوسته‌اند، لذا f فقط و فقط در نقاطی مشتق‌پذیر است که روابط کشی-ریمان در آن نقاط برقرار باشند، یعنی نقاط (x,y) که برای آنها داشته باشیم

$$\begin{cases}4x=4y\\ 0=0\end{cases}$$

پس مجموعهٔ تمام نقاطی که f در آنها مشتق‌پذیر است، مجموعهٔ تمام نقاط واقع روی خط $x=y$ می‌باشد. هم‌چنین برای نقاط روی این خط داریم:

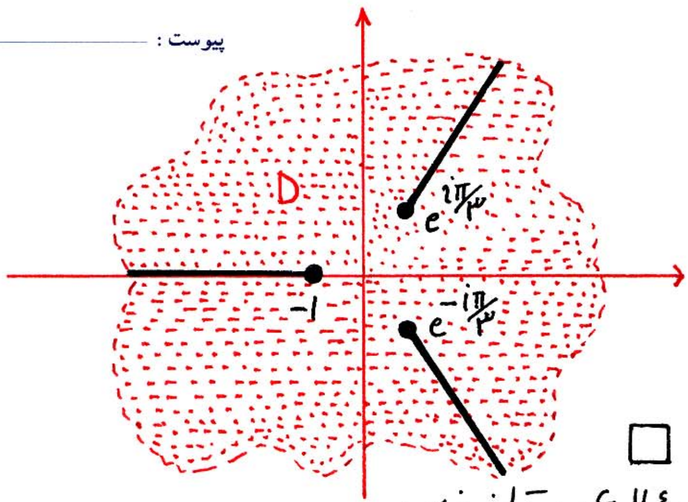
$$f'(z)=4x+i(0)=4\,\mathrm{Re}\,z.$$

با توجه به اینکه مجموعهٔ نقاطی که f در آنها مشتق‌پذیر است یک خط می‌باشد، مجموعهٔ نقاطی که f در آنها تحلیلی است تهی خواهد بود. □

سؤال ۵: توجه می‌کنیم که $f=g\circ h$ که در آن g تابع با ضابطهٔ $g(z)=\log z$ و h تابع با ضابطهٔ $h(z)=z^3+1$ است. چون بزرگترین میدانی که g در آن تحلیلی است $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ می‌باشد و h نیز تابعی تام است پس بزرگترین میدانی که f در آن تحلیلی است

$$D=\{z\in\mathbb{C}:\ z^3+1\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]\}$$
$$=\{z\in\mathbb{C}:\ z^3\notin(-\infty,-1]\}$$

خواهد بود:



□

سؤال ۶: می‌توانیم بنویسیم

$$p(z)=a_n(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_n)$$

که در آن $a_n\neq 0$ و α_iها نیز که لزوماً متمایز نمی‌باشند روی دایرهٔ واحد واقع اند. محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که

$$q(z)=2zp'(z)-np(z)$$
$$=a_n\big[(z+\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)$$
$$+(z-\alpha_1)(z+\alpha_2)(z-\alpha_3)\cdots(z-\alpha_n)$$
$$+\cdots$$
$$+(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_{n-1})(z+\alpha_n)\big]$$

و در نتیجه با فرض $z\neq\alpha_i$، $1\le i\le n$،

$$\frac{q(z)}{p(z)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{z+\alpha_i}{z-\alpha_i}.$$

پس اگر $z\neq\alpha_i$، $1\le i\le n$، به دست می‌آوریم

$$\mathrm{Re}\,\frac{q(z)}{p(z)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{|z|^2-1}{|z-\alpha_i|^2}.$$

حال فرض کنید β ریشه‌ای از $q(z)$ باشد. اگر β روی دایرهٔ واحد واقع نباشد، آنگاه $\beta\neq\alpha_i$، $1\le i\le n$ و در نتیجه تساوی

$$\mathrm{Re}\,\frac{q(\beta)}{p(\beta)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{|\beta|^2-1}{|\beta-\alpha_i|^2}$$

برقرار است. اما $q(\beta)=0$ و لذا $\sum_{i=1}^{n}\frac{|\beta|^2-1}{|\beta-\alpha_i|^2}=0$ که نتیجه می‌دهد $|\beta|=1$. این نیز تناقض است، پس β روی دایرهٔ واحد واقع است. □

دانشگاه صنعتی شریف

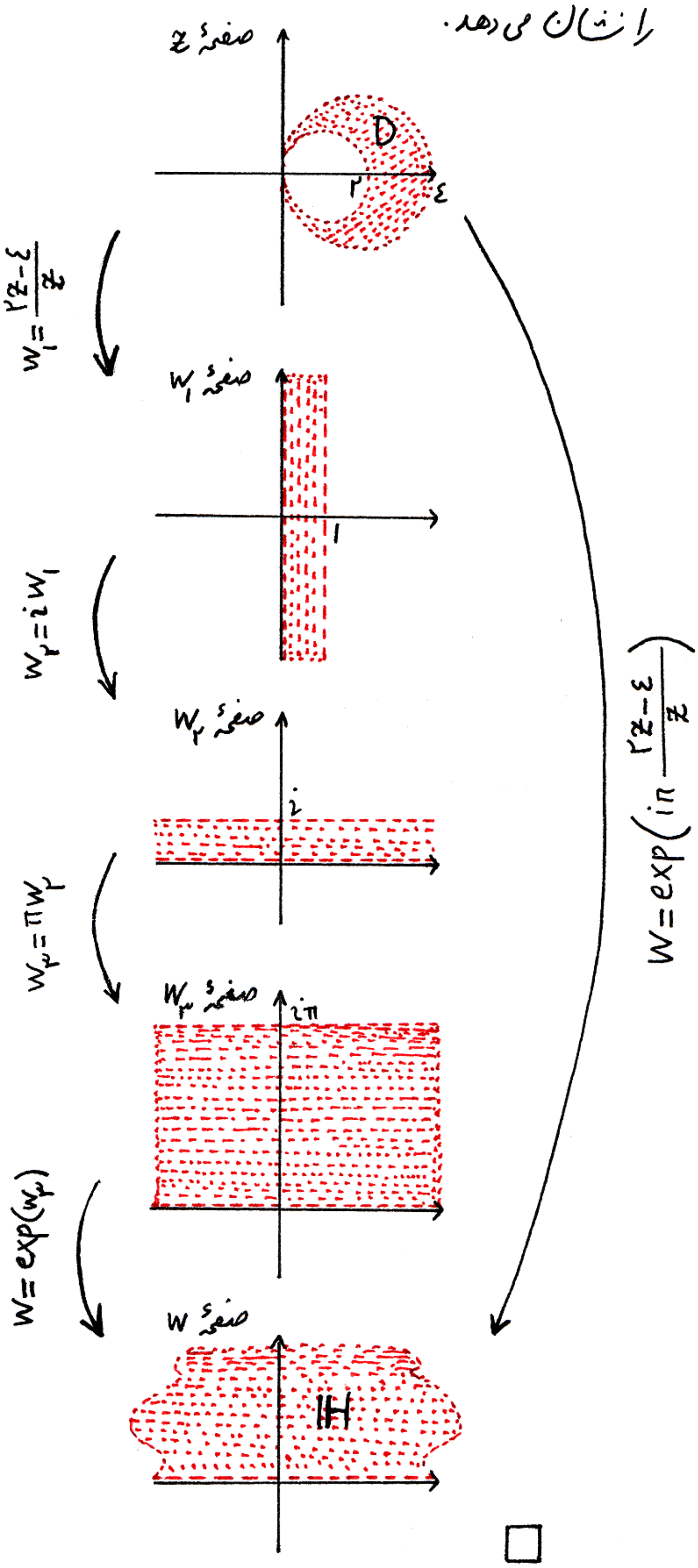
بسمه تعالی

تاریخ : ۸۷/۲/۱۲

شماره :

پیوست :

سؤال ۷: بله. شکل‌های زیر طریقهٔ یافتن چنین نگاشتی را نشان می‌دهد.



$\square$

سؤال ۸: با توجه به اینکه u دارای مشتقات پاره‌ای مرتبهٔ دوم پیوسته است، پس شرط لازم و کافی برای همساز بودن u روی $\mathbb{R}^2$ این است که روی $\mathbb{R}^2$ داشته باشیم $u_{xx}+u_{yy}=0$. یعنی اینکه برای هر $(x,y)\in\mathbb{R}^2$،

$$(6a+2c)x+(2b+6d)y=0$$

در نتیجه شرط لازم و کافی برای همساز بودن u روی $\mathbb{R}^2$ این است که

$$\begin{cases} c=-3a \\ b=-3d \end{cases}$$

تحت این شرایط ضابطهٔ u به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$u(x,y)=ax^3-3dx^2y-3axy^2+dy^3.$$

اگر v مزدوج همساز u روی $\mathbb{R}^2$ باشد آنگاه $u+iv$ روی $\mathbb{C}$ تحلیلی است و لذا روابط کشی-ریمان روی $\mathbb{R}^2$ برقرارند:

$$\begin{cases} 3ax^2-6dxy-3ay^2=v_y(x,y) \\ -3dx^2-6axy+3dy^2=-v_x(x,y) \end{cases}$$

انتگرال‌گیری از معادلهٔ اول برحسب y به دست می‌دهد

$$v(x,y)=3ax^2y-3dxy^2-ay^3+g(x)$$

و لذا

$$6axy-3dy^2+g'(x)=3dx^2+6axy-3dy^2$$

یا

$$g'(x)=3dx^2$$

که نتیجه می‌دهد $g(x)=dx^3+k$ که در آن $k\in\mathbb{R}$ ثابت دلخواه است. پس تمام مزدوج‌های همساز u به ازای $k\in\mathbb{R}$ های مختلف به دست می‌آیند:

$$v(x,y)=3ax^2y-3dxy^2-ay^3+dx^3+k. \quad \square$$