



تاریخ امتحان: ۸۷/۳/۲۵

مدت امتحان: ۴ ساعت

## امتحان پایان ترم توابع مختلط ۱

۲۲ - ۳۳۵

## نیمسال دوم ۸۷-۸۶

سؤال ۱. فرض کنید  $C$  خطی باشد که نقطه ۱ را به نقطه  $i$  وصل می‌کند (جهت خط از ۱ به  $i$  است). حاصل انتگرال زیر را با استفاده از دو روش مختلف حساب کنید.

$$\int_C \frac{z^{10} + 1}{z^6} dz$$

سؤال ۲. فرض کنید  $D$  میدانی ساده و  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  تابعی تحلیلی باشد. ثابت کنید اگر  $C$  مثلثی واقع در  $D$  باشد آنگاه  $\int_C f(z) dz = 0$ .

سؤال ۳. فرض کنید  $C$  خمی ژردان و قطعه به قطعه هموار باشد با این ویژگی که دایره واحد در درون آن واقع است. با استفاده از فرمول انتگرال کشی حاصل انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int_C \frac{z^2 - i}{z^4 - 1} dz$$

سؤال ۴. صورت قضیه مررا را بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۵. فرض کنید  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  تابعی تام باشد با این ویژگی که برای هر  $z \in \mathbb{C}$ ،  $\operatorname{Re}(f(z)) = 0$ . بدون استفاده از روابط کشی-ریمان نشان دهید  $f$  تابعی ثابت است. اگر برای هر  $z \in \mathbb{C}$  داشته باشیم  $\operatorname{Re}(f(z)) > 0$ ، آیا باز هم می‌توان نتیجه گرفت که  $f$  تابعی ثابت است؟ چرا؟

سؤال ۶. فرض کنید  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  قرص باز واحد و  $a \in \mathbb{D}$  غیر صفر باشد. ثابت کنید اگر  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  تابعی تحلیلی باشد با این ویژگی که  $f(0) = a$  آنگاه  $f$  در قرص باز  $|z| < |a|$  ریشه ندارد.

سؤال ۷. فرض کنید  $a$  عددی مختلط باشد با این ویژگی که  $|a| > e$ . تعداد جواب‌های معادله  $e^z - az = 0$  را در میدان  $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 1\}$  به دست آورید.

سؤال ۸. صورت قضیه هورویتس را بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۹. فرض کنید  $\{f_n\}$  دنباله‌ای از توابع تحلیلی روی میدان  $D$  باشد با این ویژگی که روی زیرمجموعه‌های فشرده  $D$  به طور یکنواخت به تابع  $f$  همگراست. ثابت کنید  $f$  روی  $D$  تحلیلی است.

سؤال ۱۰. صورت قضیه تیلر را بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۱۱. تابع  $f$  با ضابطه

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

را در حلقه باز  $D = \{z \in \mathbb{C} : \sqrt{2} < |z + i| < \sqrt{5}\}$  حول نقطه  $-i$  به سری لوران بسط دهید.

سؤال ۱۲. با استفاده از مفاهیم نظریه توابع مختلط حاصل انتگرال حقیقی زیر را حساب کنید.

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

توزیع نمره. سؤال‌های ۳، ۶، ۸، ۱۲ هرکدام ۵ نمره و بقیه سؤال‌ها هرکدام ۱۰ نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره