بسمه تعالی

تاریخ : ۸۷/۳/۲۵

شماره :

پیوست :

دانشگاه صنعتی شریف

حل مسایل امتحان پایان ترم توابع مختلط ۱

سؤال ۱: روش اول. بنابر مطالب خوانده شده اگر Γ ربعی از دایرهٔ واحد باشد که پرمایشی به صورت

$$\Gamma: \gamma(t)=e^{it}, \quad 0\le t\le \frac{\pi}{2}$$

دارد، آنگاه می‌توانیم بنویسیم

$$\int_C \frac{z^{10}+1}{z^6}\,dz = \int_\Gamma \frac{z^{10}+1}{z^6}\,dz$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{e^{10it}+1}{e^{6it}}\,(ie^{it})\,dt = i\int_0^{\pi/2}(e^{5it}+e^{-5it})\,dt$$

$$= 2i\int_0^{\pi/2}\cos 5t\,dt = \frac{2}{5}i\sin 5t\Big]_0^{\pi/2} = \frac{2}{5}i.$$

روش دوم. بنابر مطالب خوانده شده می‌توانیم بنویسیم

$$\int_C \frac{z^{10}+1}{z^6}\,dz = \int_1^i (z^4+z^{-6})\,dz = \left(\frac{1}{5}z^5-\frac{1}{5}z^{-5}\right)\Big]_1^i$$

$$= \frac{1}{5}(i^5-i^{-5}) = \frac{2}{5}i. \ \square$$

سؤال ۳: چهار دایرهٔ C_1، C_2، C_3 و C_4 را به ترتیب به مرکز ۱، i، ۱- و i- طوری در نظر می‌گیریم که درون C قرار گیرند و یکدیگر را نیز قطع نکنند. در نتیجه بنابر مطالب خوانده شده و نیز فرمول انتگرال کشی می‌توانیم بنویسیم

$$\int_C \frac{z^2-i}{z^4-1}\,dz = \int_{C_1} \frac{(z^2-i)/(z+1)(z^2+1)}{z-1}\,dz$$

$$+\int_{C_2} \frac{(z^2-i)/(z^2-1)(z+i)}{z-i}\,dz + \int_{C_3} \frac{(z^2-i)/(z-1)(z^2+1)}{z+1}\,dz$$

$$+\int_{C_4} \frac{(z^2-i)/(z-i)(z^2-1)}{z+i}\,dz = 2\pi i\left(\frac{1-i}{4}\right)$$

$$+2\pi i\left(\frac{-1-i}{-4i}\right) + 2\pi i\left(\frac{1-i}{-4}\right)$$

$$+2\pi i\left(\frac{-1-i}{4i}\right) = 0. \ \square$$

سؤال ۵: ابتدا فرض کنید برای هر $z\in\mathbb{C}$، $\mathrm{Re}(f(z))=0$. اگر f تابعی غیرثابت باشد بنابر قضیهٔ نگاشت باز $f(\mathbb{C})$ باز خواهد بود در حالی که بنابر فرض مسأله نمی‌تواند چنین باشد چون $f(\mathbb{C})$ زیرمجموعه‌ای از محور y است. پس f ثابت است. برای حل قسمت دوم مسأله، توجه می‌کنیم که اگر $\mathbb{A}=\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z>0\}$ نیم صفحهٔ راست و $\mathbb{D}=\{w\in\mathbb{C} : |w|<1\}$ قرص باز واحد باشد آنگاه تابع g با ضابطهٔ $g(z)=\frac{z-1}{z+1}$ در $\mathbb{A}$ تحلیلی است و نیز $\mathbb{A}$ را به روی $\mathbb{D}$ می‌نگارد. اکنون فرض کنید برای هر $z\in\mathbb{C}$، $\mathrm{Re}(f(z))>0$. در نتیجه برای هر $z\in\mathbb{C}$، $f(z)\in\mathbb{A}$ و لذا $g\circ f:\mathbb{C}\to\mathbb{D}$ تام و کراندار است که بنابر قضیهٔ لیوویل ثابت خواهد بود. یعنی برای هر $z\in\mathbb{C}$، $\frac{f(z)-1}{f(z)+1}$ ثابت است که نتیجه می‌دهد f نیز تابعی ثابت است. $\square$

سؤال ۶: توجه کنید که تابع $g:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ با ضابطهٔ

$$g(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

روی $\mathbb{D}$ تحلیلی است و $g(a)=0$. در نتیجه تابع $g\circ f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ نیز روی $\mathbb{D}$ تحلیلی خواهد بود و $g\circ f(0)=0$. پس بنابر لم شوارتس برای هر $z\in\mathbb{D}$، $|g\circ f(z)|\le|z|$. حال فرض کنید f در قرص باز $|z|<|a|$ دارای ریشه‌ای باشد، مثلاً z_0، یعنی $|z_0|<|a|$. چون $z_0\in\mathbb{D}$ پس $|g\circ f(z_0)|\le|z_0|$ و لذا $|g(0)|\le|z_0|$ یا $|a|\le|z_0|$ که تناقض است. پس f در قرص باز $|z|<|a|$ ریشه‌ای ندارد. $\square$

سؤال ۷: فرض کنید $R>2$ عددی حقیقی و C خمی ژردان باشد که از یک خط عمودی از $1-iR$ تا $1+iR$ و نیز یک نیم دایره به مرکز ۱ و شعاع R از $1+iR$ تا $1-iR$

در D تشکیل شده است. توابع f و g را به صورت $f(z)=e^{z}$ و $g(z)=-az$ تعریف می‌کنیم. برای هر $z\in C$ می‌توانیم بنویسیم

$$|f(z)|=e^{\mathrm{Re}\,z}\le e<|a|\le|az|=|g(z)|.$$

در نتیجه بنابر قضیهٔ روشه تعداد ریشه‌های $g(z)=-az$ و $f(z)+g(z)=e^{z}-az$ داخل خم C برابرند. چون $g(z)$ فقط و فقط یک ریشه ($z=0$) داخل خم C دارد، پس معادلهٔ $e^{z}-az=0$ فقط و فقط یک جواب داخل خم C خواهد داشت. چون $R>2$ دلخواه فرض شده است پس معادلهٔ $e^{z}-az=0$ در میدان D نیز فقط و فقط یک جواب دارد. $\square$

سؤال ۱۱: با توجه به اینکه برای هر $z\in D$، $\left|\frac{1+i}{z+i}\right|<1$ و $\left|\frac{z+i}{2+i}\right|<1$، می‌توانیم بنویسیم

$$f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{(1-z)(2-z)}$$

$$=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=\frac{1}{(1+i)-(z+i)}-\frac{1}{(2+i)-(z+i)}$$

$$=-\frac{1}{z+i}\,\frac{1}{1-\frac{1+i}{z+i}}-\frac{1}{2+i}\,\frac{1}{1-\frac{z+i}{2+i}}$$

$$=-\frac{1}{z+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+i}{z+i}\right)^n-\frac{1}{2+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{2+i}\right)^n$$

$$=-\frac{1}{z+i}\sum_{n=-\infty}^{0}\left(\frac{z+i}{1+i}\right)^n-\frac{1}{2+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{2+i}\right)^n$$

$$=-\sum_{n=-\infty}^{0}(1+i)^{-n}(z+i)^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(2+i)^{-n-1}(z+i)^n$$

$$=-\sum_{n=-\infty}^{-1}(1+i)^{-n-1}(z+i)^n-\sum_{n=0}^{\infty}(2+i)^{-n-1}(z+i)^n.$$

$\square$

سؤال ۱۲: فرض کنید $f(z)=\frac{z}{(z^2+1)^2}$. با توجه به اینکه به ازای مقادیر بزرگ $|z|$، $|f(z)|\le\frac{1}{|z|}$، بنابر قضیهٔ خوانده شده می‌توانیم بنویسیم

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix}\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx=2\pi i\times\sum\left(\text{مانده‌های } \frac{e^{iz}z}{(z^2+1)^2} \text{ در نقاط تکین منفرد واقع در نیم صفحهٔ بالایی}\right)$$

$$=2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}z}{(z^2+1)^2},\ i\right)$$

$$=2\pi i\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}(z-i)^2\frac{e^{iz}z}{(z^2+1)^2}$$

$$=2\pi i\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{e^{iz}z}{(z+i)^2}$$

$$=2\pi i\lim_{z\to i}\frac{e^{iz}(1+iz)(z+i)^2-2(z+i)ze^{iz}}{(z+i)^4}$$

$$=2\pi i\left(\frac{1}{4e}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2e}i.$$

پس

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{(x^2+1)^2}\,dx=\frac{\pi}{2e}$$

و لذا

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x\sin x}{(x^2+1)^2}\,dx=\frac{\pi}{4e}.\ \square$$