به‌نام خدا

دانشکدهٔ علوم ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۷/۸/۲۳
مدّت امتحان: ۳ ساعت

امتحان میان‌ترم جبر ۱

۲۲ − ۲۱۷

نیمسال اوّل ۸۸—۸۷

سؤال ۱. فرض کنید G یک مجموعهٔ ناتهی باشد و $\cdot : G \times G \longrightarrow G$ ، $\cdot(a,b) := ab$ ، را عملی شرکت پذیر در نظر بگیرید با این ویژگی که برای هر $a, b \in G$ معادلات $ax = b$ و $ya = b$ در G دارای جواب باشند. ثابت کنید G با این عمل یک گروه می‌باشد.

سؤال ۲. فرض کنید $G = \langle a \rangle$ یک گروه دوریِ مرتبهٔ n باشد و d را مقسوم علیه مثبتی از n در نظر بگیرید. ثابت کنید G دقیقاً یک زیرگروه از مرتبهٔ d دارد.

سؤال ۳. هر یک از احکام زیر را که درست است ثابت کنید و برای هر کدام که نادرست است مثالی ناقض ارائه کنید.

الف) هر زیرگروهِ متناهی مولدِ گروه جمعی $\mathbb{Q}$ دوری است.

ب) فرض کنید G یک گروه باشد و $g_1, g_2 \in G$. اگر مرتبهٔ g_1 و g_2 متناهی باشد، آنگاه مرتبهٔ $g_1 g_2$ نیز متناهی است.

ج) فرض کنید H زیرگروهی از گروه متناوب A_4 باشد با این ویژگی که برای هر $\sigma \in A_4$ داشته باشیم $\sigma^2 \in H$. در این صورت هر دور به‌طول ۳ در گروه جایگشتی S_4 عضوی از H است.

سؤال ۴. فرض کنید G یک گروه باشد و $g \in G$. ثابت کنید اگر $|g| = n_1 n_2$ که n_1 و n_2 دو عدد صحیحِ مثبت و نسبت به هم اوّل هستند، آنگاه اعضای $g_1, g_2 \in G$ موجودند که $g = g_1 g_2 = g_2 g_1$، $|g_1| = n_1$ و $|g_2| = n_2$. آیا در اینجا g_1 و g_2 منحصربه‌فرداند؟

سؤال ۵. فرض کنید G یک گروه باشد و H را زیرگروهی از G در نظر بگیرید با این ویژگی که برای هر $x, y \in G$ که $x \notin H$، عضو منحصربه‌فرد $u \in H$ موجود است که $yxy^{-1} = uxu^{-1}$. ثابت کنید برای هر $x \in G$ که $x \notin H$، $C_G(x) \cap H = \{e\}$.

سؤال ٦. فرض کنید G یک گروه باشد و $\{H_i\}_{i \in \Lambda}$ را خانواده‌ای ناتهی از زیرگروه‌های G در نظر بگیرید با این ویژگی که برای هر $i, j \in \Lambda$، $H_i \subseteq H_j$ یا $H_j \subseteq H_i$. همچنین فرض کنید $H := \bigcup_{i \in \Lambda} H_i$.

الف) ثابت کنید $H \leq G$.

ب) ثابت کنید اگر G متناهی مولد باشد و برای هر $i \in \Lambda$ داشته باشیم $H_i \neq G$، آنگاه $H \neq G$.

توزیع نمره. سؤال‌های ۱، ۲، ۴ و ۵: هر کدام ۷ نمره، سؤال ۳: هر قسمت ۴ نمره، سؤال ٦: هر قسمت ۵ نمره.

مجموع: ۵۰ نمره