بسمه تعالی

تاریخ: ۸۷/۸/۲۳

شماره:

پیوست:

دانشگاه صنعتی شریف

حل مسایل امتحان میان‌ترم جبر ۱

سؤال ۳: الف) درست است: فرض کنید $H=\langle \frac{m_1}{n_1},\dots,\frac{m_\ell}{n_\ell}\rangle$ زیرگروهی متناهی مولد از $\mathbb{Q}$ باشد. به وضوح $H\leqslant\langle\frac{1}{n_1\cdots n_\ell}\rangle$ و لذا H دوری است. □

ب) نادرست است: گروه $S_{\mathbb{R}}$ را در نظر بگیرید. در این صورت $g_1,g_2\in S_{\mathbb{R}}$ با ضابطه‌های $g_1(x)=1-x$ و $g_2(x)=-x$ اعضای مرتبهٔ ۲ هستند ولی g_1g_2 که ضابطه‌اش $g_1g_2(x)=1+x$ می‌باشد از مرتبهٔ نامتناهی است. □

ج) درست است: فرض کنید $\sigma\in S_4$ دوری به طول ۳ باشد. چون دورهای به طول ۳ زوج‌اند، پس $\sigma\in A_4$ و لذا $\sigma^2\in H$. درنتیجه $\sigma=\sigma\sigma^3=\sigma^4=(\sigma^2)^2\in H$. □

سؤال ۴: چون $(n_1,n_2)=1$ پس اعداد صحیح r و s موجودند که $rn_1+sn_2=1$. قرار دهید $g_1=g^{sn_2}$ و $g_2=g^{rn_1}$. در این صورت

$$g=g^{rn_1+sn_2}=g^{sn_2}g^{rn_1}=g^{rn_1}g^{sn_2}=g_1g_2=g_2g_1,$$

$$|g_1|=\frac{n_1n_2}{(n_1n_2,sn_2)}=n_1,\quad |g_2|=\frac{n_1n_2}{(n_1n_2,rn_1)}=n_2.$$

بله، g_1 و g_2 در اینجا منحصربه‌فرداند. زیرا اگر فرض کنیم اعضای $h_1,h_2\in G$ نیز موجودند که $g=h_1h_2=h_2h_1$، $|h_1|=n_1$ و $|h_2|=n_2$، آنگاه به دست می‌آوریم

$$h_1=h_1^{1-rn_1}=h_1^{sn_2}=h_1^{sn_2}h_2^{sn_2}=g^{sn_2}=g_1,$$

$$h_2=h_2^{1-sn_2}=h_2^{rn_1}=h_1^{rn_1}h_2^{rn_1}=g^{rn_1}=g_2.\ \square$$

سؤال ۵: فرض کنید $x\in G$ که $x\notin H$. اگر $y\in C_G(x)\cap H$ آنگاه $yxy^{-1}=x$ و $y\in H$. چون $x\notin H$، عضو منحصربه‌فرد $u\in H$ موجود است که $yxy^{-1}=uxu^{-1}$. از طرفی می‌توانیم بنویسیم

$$yxy^{-1}=uxu^{-1}=u(yxy^{-1})u^{-1}=(uy)x(y^{-1}u^{-1})$$
$$=(uy)x(uy)^{-1}.$$

چون $uy\in H$، منحصربه‌فرد بودن u نتیجه می‌دهد که $uy=u$ و لذا $y=e$. درنتیجه $C_G(x)\cap H=\{e\}$. □

سؤال ۶: الف) واضح است که H زیرمجموعه‌ای ناتهی از G است. اکنون فرض کنید x و $y\in H$ دلخواه باشند. پس برای یک $i\in\Lambda$، $x\in H_i$ و برای یک $j\in\Lambda$، $y\in H_j$. امّا $H_i\subseteq H_j$ یا $H_j\subseteq H_i$. مثلاً فرض کنید $H_i\subseteq H_j$ که نتیجه می‌دهد $x,y\in H_j$. چون $H_j\leqslant G$ پس $xy^{-1}\in H_j\subseteq H$ و لذا بنابر محک فشرده $H\leqslant G$. □

ب) چون G متناهی مولد است می‌توانیم فرض کنیم که $G=\langle x_1,\dots,x_n\rangle$. فرض کنید $H=G$. درنتیجه برای هر $1\leqslant i\leqslant n$، $l_i\in\Lambda$ موجود است که $x_i\in H_{l_i}$. فرض مسأله نتیجه می‌دهد که $1\leq k\leq n$ موجود است که $x_1,\dots,x_n\in H_{l_k}$ و درنتیجه $\langle x_1,\dots,x_n\rangle\subseteq H_{l_k}$. پس به دست می‌آوریم

$$H=G=\langle x_1,\dots,x_n\rangle\subseteq H_{l_k}\subseteq H,$$

که نتیجه می‌دهد $H_{l_k}=G$. این نیز با فرض تناقض دارد و لذا $H\neq G$. □