



تاریخ امتحان: ۸۷/۱۰/۲۸
مدت امتحان: ۴ ساعت

امتحان پایان ترم جبر ۱

۲۲ - ۲۱۷

نیمسال اول ۸۸-۸۷

سؤال ۱. فرض کنید n عددی فرد و G یک گروه $2n$ عضوی باشد. ثابت کنید G زیرگروهی نرمال از مرتبه n دارد.

سؤال ۲. فرض کنید G یک گروه آبلی متناهی باشد و p را مقسوم علیه اولی از $|G|$ در نظر بگیرید. ثابت کنید G زیرگروهی از مرتبه p دارد.

سؤال ۳. فرض کنید R یک حلقه جابه جایی و یکدار غیرصفر و M ایده آلی سره از آن باشد. ثابت کنید M ایده آل ماکسیمال R است اگر و فقط اگر R/M میدان باشد.

سؤال ۴. فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد و G را زیرگروهی از S_n در نظر بگیرید با این ویژگی که برای هر $1 \leq i, j \leq n$ ، عضو $\sigma \in G$ موجود است که $\sigma(i) = j$. ثابت کنید $|G|$ مضربی از $n!$ است.

سؤال ۵. فرض کنید p یک عدد اول باشد و G را گروهی غیرآبلی از مرتبه p^3 در نظر بگیرید. گروه‌های $Z(G)$ ، $G/Z(G)$ و G' با کدام گروه‌های شناخته شده یکرخت هستند؟ چرا؟

سؤال ۶. فرض کنید G یک گروه آبلی باشد و $\varphi: G \rightarrow G$ یک همریختی از G با این ویژگی که $\varphi^2 = \varphi$. ثابت کنید $G = \text{Ker } \varphi \times \text{Im } \varphi$.

سؤال ۷. فرض کنید R یک حلقه جابه جایی و یکدار غیرصفر باشد با این ویژگی که هر ایده آل سره آن ایده آلی اول است. ثابت کنید R میدان است.

سؤال ۸. هر یک از احکام زیر را که درست است ثابت کنید و برای هر کدام که نادرست است مثالی ناقض ارائه کنید.

(الف) فرض کنید G_1 و G_2 دو گروه باشند. در این صورت هر زیرگروه $G_1 \oplus G_2$ به صورت $H_1 \oplus H_2$ است که در آن H_1 زیرگروهی از G_1 و H_2 زیرگروهی از G_2 است.

(ب) فرض کنید R_1 و R_2 دو حلقه باشند. در این صورت هر زیرحلقه $R_1 \oplus R_2$ به صورت $S_1 \oplus S_2$ است که در آن S_1 زیرحلقه‌ای از R_1 و S_2 زیرحلقه‌ای از R_2 است.

ج) فرض کنید \mathbb{C}^\times گروه ضربی اعداد مختلط ناصفر و H زیرگروهی از \mathbb{C}^\times با شاخص متناهی باشد. در این صورت $H = \mathbb{C}^\times$.

د) فرض کنید R یک حلقه باشد با این ویژگی که برای هر $x \in R$ ، $x^2 + x \in Z(R)$. در این صورت R جابه‌جایی است.

ه) فرض کنید R و S دو حلقهٔ یک‌کدار و $\varphi: R \rightarrow S$ یک هم‌ریختی حلقه‌ای باشد. در این صورت $\varphi(1)$ یک حلقهٔ S است.

و) فرض کنید R یک حلقه باشد با این ویژگی که برای هر $x \in R$ ، $x^2 = x$. در این صورت R جابه‌جایی است.

ز) فرض کنید G یک گروه باشد، $H \trianglelefteq G$ ، $K \leq G$ ، $G = HK$ و $H \cap K = \{e\}$. در این صورت $G \cong H \oplus K$.

ح) فرض کنید R و S دو حوزهٔ صحیح باشند. در این صورت $R \oplus S$ نیز حوزهٔ صحیح است.

ط) اگر G یک گروه باشد که فقط دارای دو کلاس تزویج است، آنگاه $G \cong \mathbb{Z}_2$.

ی) فرض کنید $n \geq 3$ عددی طبیعی باشد. در این صورت $\text{Inn}(S_n) \cong S_n$.

توزیع نمره. سؤال‌های ۱ تا ۷: هر کدام ۱۰ نمره، سؤال ۸: هر قسمت ۳ نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره