تاریخ: ۸۷/۸/۳۰
شماره:
پیوست:

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

حل مسایل امتحان میان‌ترم ریاضی مهندسی

سؤال ۱: ضرایب سری فوریهٔ کسینوسی f به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\big(\sin(1+n)x + \sin(1-n)x\big)\,dx.$$

درنتیجه برای $n=1$ به دست می‌آوریم

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx = 0$$

و برای $n\neq 1$ نیز خواهیم داشت

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{1+n}\cos(1+n)x - \frac{1}{1-n}\cos(1-n)x\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{2}{\pi}\times\frac{(-1)^n+1}{1-n^2}.$$

بالاخص داریم $a_0 = \frac{4}{\pi}$. پس سری فوریهٔ کسینوسی f به صورت

$$\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}\cos 2nx$$

می‌باشد. همچنین با استفاده از اتحاد پارسوال، یعنی

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

به دست می‌آوریم

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx = \frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}$$

یا

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2-8}{16}. \quad \square$$

سؤال ۲: ضرایب انتگرال فوریهٔ سینوسی f به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x}\sin\omega x\,dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{\omega^2+1}e^{-x}(\omega\cos\omega x + \sin\omega x)\right]_0^{\infty}$$
$$= \frac{2}{\pi}\times\frac{\omega}{\omega^2+1}.$$

پس انتگرال فوریهٔ سینوسی f به صورت

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\omega\sin\omega x}{\omega^2+1}\,d\omega$$

می‌باشد. چون f در نقطهٔ $x=1$ پیوسته است، لذا بنابر قضیهٔ انتگرال فوریه، انتگرال فوریهٔ f به ازای $x=1$ برابر با $f(1)=\frac{1}{e}$ است. یعنی

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\omega\sin\omega}{\omega^2+1}\,d\omega = \frac{1}{e}$$

یا

$$\int_0^{\infty}\frac{\omega\sin\omega}{\omega^2+1}\,d\omega = \frac{\pi}{2e}$$

و لذا مقدار انتگرال مطلوب برابر با $\frac{\pi}{2e}$ است. $\square$

سؤال ۳: فرض کنید جواب به صورت $u(x,y)=X(x)Y(y)$ باشد. از معادلهٔ اول به دست می‌آوریم $X''Y + XY'' = 0$ یا $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}$. چون طرف چپ این تساوی تابعی از x و طرف راست آن تابعی از y است، پس بایستی

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \text{ثابت} \quad (\lambda = \text{مثلاً}).$$

درنتیجه با استفاده از شرایط چهارم و پنجم به دستگاه

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases} \qquad (\mathrm{I})$$

و نیز با استفاده از شرط سوم به دستگاه

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y(\pi) = 0 \end{cases} \qquad (\mathrm{II})$$

می‌رسیم. برای $\lambda>0$، دستگاه (I) جواب $X(x)=0$ را به دست می‌دهد که منجر به جواب $u(x,y)=0$ برای مسألهٔ اصلی می‌شود که به دلیل شرط دوم غیرقابل قبول است. پس می‌توانیم فرض کنیم $\lambda\leq 0$. برای $\lambda=0$ جواب $X(x)=A$ برای دستگاه (I) و جواب $Y(y)=B(\pi-y)$ برای دستگاه (II) به دست می‌آید که منجر به جواب

$$u(x,y) = \left(\frac{\pi-y}{\pi}\right)\frac{a_0}{2}$$

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

برای مسأله اصلی می‌شود که در شرایط سوم، چهارم و پنجم صادق است. هم چنین برای $\lambda<0$ جواب

$$X(x)=A\cos\sqrt{-\lambda}\,x+B\sin\sqrt{-\lambda}\,x$$

برای معادله دستگاه (I) به وجود می‌آید که با توجه به شرایط $X'(0)=X'(\pi)=0$ به دست می‌آوریم $B=0$ و $A\sqrt{-\lambda}\sin\sqrt{-\lambda}\,\pi=0$. بایستی فرض کنیم $A\neq0$، زیرا در غیر این صورت مجدداً جواب غیرقابل قبول $u(x,y)=0$ به دست می‌آید. اما با فرض $A\neq0$ به دست می‌آوریم $\sin\sqrt{-\lambda}\,\pi=0$ یا $\lambda=-n^2$ برای $n\in\mathbb{N}$. پس هر کدام از λهای به شکل بالا جواب غیربدیهی قابل قبول به وجود می‌آورد و بقیه λهای منفی مجدداً جواب بدیهی غیرقابل قبول. پس با قرار دادن $\lambda_n=-n^2$، $n\in\mathbb{N}$، جواب‌های غیربدیهی

$$X_n(x)=A_n\cos nx$$

برای دستگاه (I) به وجود می‌آید که جواب متناظر دستگاه برحسب Y، به صورت

$$Y_n(y)=B_n\sinh n(\pi-y)$$

خواهد بود و لذا جواب

$$u(x,y)=a_n\sinh n(\pi-y)\cos nx$$

برای مسأله اصلی که در تمام شرایط، بجز شرط دوم صادق است به دست می‌آید. در نتیجه

$$u(x,y)=\left(\frac{\pi-y}{\pi}\right)\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sinh n(\pi-y)\cos nx$$

نیز جوابی برای مسأله اصلی است که در تمام شرایط، بجز شرط دوم صادق است. اکنون a_nها را طوری پیدا می‌کنیم که این جواب در شرط دوم نیز صدق کند، یعنی داشته باشیم

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sinh n\pi\cos nx=\sinh\pi\cos x.$$

پس a_nها به صورت زیر می‌باشند:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sinh\pi\cos x\,dx=0$$

$$a_n\sinh n\pi=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sinh\pi\cos x\cos nx\,dx=\begin{cases}\sinh\pi & : n=1\\ 0 & : n>1\end{cases}$$

در نتیجه

$$u(x,y)=\sinh(\pi-y)\cos x$$

جواب صوری مسأله مورد نظر است. به راحتی دیده می‌شود که این جواب در تمام شرایط مسأله صادق است و لذا جواب واقعی مسأله است. □

سؤال ۴: فرض کنید $U(\omega,t)$ تبدیل فوریه $u(x,t)$ نسبت به x باشد. با گرفتن تبدیل فوریه از معادله اول به دست می‌آوریم

$$\mathcal{F}(u_t)=\mathcal{F}(u_{xx}).$$

تساوی بالا با توجه به شرط سوم به صورت

$$\frac{\partial}{\partial t}U(\omega,t)=-\omega^2U(\omega,t)$$

تبدیل می‌شود که با توجه به شرط دوم که به دست می‌دهد $U(\omega,0)=\mathcal{F}(f(x))$ جوابی به صورت

$$U(\omega,t)=\mathcal{F}(f(x))\,e^{-\omega^2t}$$

دارد. چون

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2t}}e^{-x^2/4t}\right)=e^{-\omega^2t}$$

به دست می‌آوریم

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\,e^{-(x-\xi)^2/4t}\,d\xi$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}e^{-(x-\xi)^2/4t}\,d\xi$$

$$=1+\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right).$$

توجه کنید که در اینجا جواب صوری، جواب واقعی نمی‌باشد. □