تاریخ: ۸۷/۱۰/۲۶

شماره:

پیوست:

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

حل مسایل امتحان پایان ترم ریاضی مهندسی

سؤال ۱: با فرض $z=x+iy$ به دست می آوریم:

$$f(z)=a|z|^2+\bar{a}\,\mathrm{Re}(z^2)=a(x^2+y^2)+\bar{a}(x^2-y^2)$$
$$=(2\,\mathrm{Re}\,a)x^2+i(2\,\mathrm{Im}\,a)y^2.$$

پس توابع u و v با ضابطه های

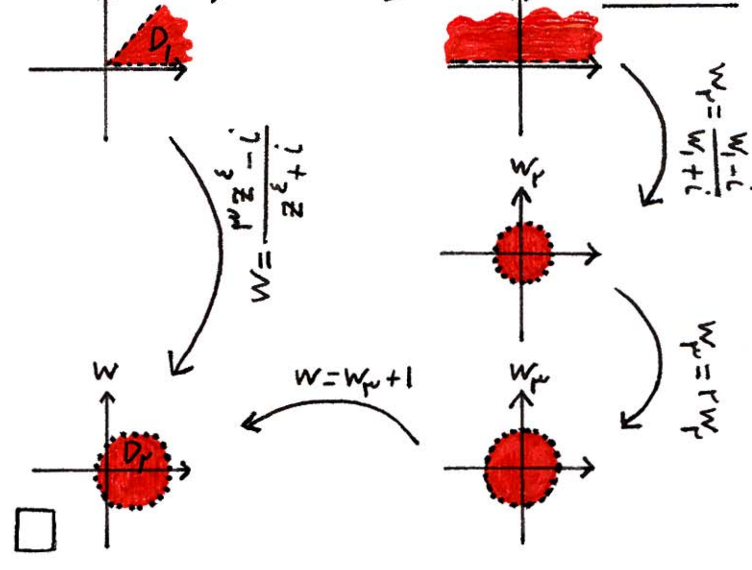
$$u(x,y)=(2\,\mathrm{Re}\,a)x^2 \text{ و } v(x,y)=(2\,\mathrm{Im}\,a)y^2$$

به ترتیب قسمت های حقیقی و موهومی f هستند و چون این توابع در تمام نقاط $\mathbb{R}^2$ پیوسته اند، پس f نیز به ازای هر مقدار a در تمام نقاط $\mathbb{C}$ پیوسته است. چون مشتقات پاره ای مرتبهٔ اول u و v نیز در تمام نقاط $\mathbb{R}^2$ پیوسته اند، پس بنابر قضیهٔ کشی ـ ریمان f دقیقاً در نقاطی مشتق‌پذیر است که در روابط کشی ـ ریمان صدق کنند. روابط کشی-ریمان به صورت زیر می باشند:

$$\begin{cases}(4\,\mathrm{Re}\,a)x=(4\,\mathrm{Im}\,a)y\\ 0=0\end{cases}$$

در نتیجه برای اینکه f فقط و فقط روی خط $y=x$ مشتق‌پذیر باشد بایستی داشته باشیم $4\,\mathrm{Re}\,a=4\,\mathrm{Im}\,a\neq0$ و لذا a بایستی به صورت $a=k(1+i)$ باشد که در آن $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. به ازای این مقادیر a، روی خط $y=x$ خواهیم داشت: $f'(z)=4kx=4k\,\mathrm{Re}\,z$. □

سؤال ۲:



□

سؤال ۳: اگر خم C نقاط i و i- را دربر نداشته باشد، بنابر قضیهٔ انتگرال کشی حاصل انتگرال مطلوب برابر با صفر است. اگر خم C فقط نقطهٔ i را دربرداشته باشد، بنابر فرمول انتگرال کشی حاصل انتگرال مطلوب برابر است با $\int_C \frac{e^{iz}/(z+i)}{z-i}\,dz=2\pi i\left(\frac{e^{-1}}{2i}\right)=\frac{\pi}{e}$.

اگر خم C فقط نقطهٔ i- را دربرداشته باشد، بنابر فرمول انتگرال کشی حاصل انتگرال مطلوب برابر است با $\int_C \frac{e^{iz}/(z-i)}{z+i}\,dz=2\pi i\left(\frac{e}{-2i}\right)=-\pi e$.

اگر خم C هردو نقطهٔ i و i- را دربرداشته باشد، آنگاه حاصل انتگرال مطلوب برابر است با $\frac{\pi}{e}-\pi e$. □

سؤال ۴: در یک همسایگی محذوف مبدأ مختصات تابع زیرانتگرال را می توان به صورت زیر به سری لوران بسط داد:

$$\frac{e^{1/z^2}}{z}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{2!}\,\frac{1}{z^5}+\cdots$$

پس بنابر قضیهٔ مانده حاصل انتگرال مطلوب برابر است با $2\pi i$. □

سؤال ۵: قرار دهید $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$. نقاط تکین منفرد f در نیم صفحهٔ بالایی عبارتند از $z_1=i$ و $z_2=2i$. خم C را متشکل از پاره خط روی محور xها از R- تا R و نیز نیم دایرهٔ Γ از R تا R- درنظر می گیریم که در آن R به قدری بزرگ است که نقاط z_1 و z_2 داخل خم قرار دارند. اینجا فرض می کنیم $R\geq 3$. چون

$$\mathrm{Res}(f,z_1)=\lim_{z\to i}\frac{z-i}{(z^2+1)(z^2+4)}=\frac{1}{6i},$$

$$\mathrm{Res}(f,z_2)=\lim_{z\to 2i}\frac{z-2i}{(z^2+1)(z^2+4)}=\frac{-1}{12i},$$

لذا بنابر قضیهٔ مانده می توانیم بنویسیم

$$\int_C\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}\,dz=2\pi i\left(\frac{1}{6i}-\frac{1}{12i}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

پس $\int_{-R}^{R}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx+\int_\Gamma\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}\,dz=\frac{\pi}{6}$ و چون $\left|\int_\Gamma\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}\,dz\right|\leq\frac{\pi}{R}$، لذا با فرض $R\to\infty$ حاصل انتگرال مطلوب برابر است با $\pi/6$. □