به‌نام خدا

دانشکدهٔ علوم ریاضی

---

## امتحان میان‌ترم جبر ۲

۲۲ – ۲۱۸

نیمسال دوم ۸۸—۸۷

تاریخ امتحان: ۸۸/۲/۱۰
مدّت امتحان: ۲/۵ ساعت

**سؤال ۱.** فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد و $H$ زیرگروهی از $G$ با شاخص $p$، که در آن $p$ کوچکترین عدد اوّلی است که مرتبهٔ $G$ را عاد می‌کند. ثابت کنید $H$ در $G$ نرمال است.

**سؤال ۲.** صورت قضیهٔ دوم سیلو را بنویسید و آن را ثابت کنید.

**سؤال ۳.** فرض کنید $G$ گروهی از مرتبهٔ ۱۲۲۵ باشد. ثابت کنید $G$ آبلی است.

**سؤال ۴.** فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد و $p$ عددی اوّل. ثابت کنید اگر $H$ زیرگروهی نرمال از $G$ باشد و $P$ یک $p$–زیرگروه سیلوی $H$، آنگاه $G = N_G(P)H$.

**سؤال ۵.** فرض کنید $R$ یک حلقه باشد با این ویژگی که فاقد عضو پوچ‌توان غیرصفر است. ثابت کنید هر عضو خودتوان $R$ در مرکز حلقهٔ $R$ قرار دارد.

**سؤال ٦.** فرض کنید $R$ یک حلقه باشد با این ویژگی که هر زیرحلقهٔ آن ایده‌آلی از آن است. ثابت کنید اگر $R$ فاقد مقسوم علیه صفر باشد، آنگاه $R$ حلقه‌ای جابه‌جایی است.

**سؤال ۷.** فرض کنید $R$ یک حلقه باشد و $n$ عددی طبیعی. ثابت کنید اگر $I$ ایده‌آلی از $R$ باشد، آنگاه $M_n(I)$ ایده‌آلی از $M_n(R)$ است و نیز

$$M_n(R/I) \cong \frac{M_n(R)}{M_n(I)}.$$

**توزیع نمره.** هر سؤال ۱۰ نمره دارد.

**مجموع: ۷۰ نمره**