بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

تاریخ: ۸۸/۲/۱۰

شماره:

پیوست:

حل مسایل امتحان میان ترم جبر ۲

سؤال ۳: چون $|G| = 5^2 \times 7^2$، پس G دارای ۵-زیرگروه سیلو و ۷-زیرگروه سیلو است. تعداد ۵-زیرگروه های سیلوی G به صورت $1+5k$ است که 7^2 را عاد می کند و لذا G فقط یک ۵-زیرگروه سیلو دارد که لزوماً در G نرمال خواهد بود. از طرفی دیگر، تعداد ۷-زیرگروه های سیلوی G به صورت $1+7k$ است که 5^2 را عاد می کند. لذا G فقط یک ۷-زیرگروه سیلو دارد که این زیرگروه نیز لزوماً در G نرمال خواهد بود. فرض کنید P یگانه ۵-زیرگروه سیلوی G و Q یگانه ۷-زیرگروه سیلوی G باشد. داریم $|P|=5^2$ و $|Q|=7^2$. چون $P\cap Q=\langle e\rangle$ لذا $|G| = 5^2\times 7^2 = |PQ|$. پس $G=PQ$. نرمال بودن P و Q در G ایجاب می کند که هر عضو P با هر عضو Q جابه جا می شود. از طرفی دیگر P و Q آبلی هستند. پس G لزوماً آبلی است. □

سؤال ۴: فرض کنید $x\in G$ عضوی دلخواه باشد. چون P یک p-زیرگروه سیلوی H می باشد، نرمال بودن H در G نتیجه می دهد که $x^{-1}Px$ نیز یک p-زیرگروه سیلوی H است. لذا $h\in H$ موجود است که $h^{-1}(x^{-1}Px)h = P$ یا $(xh)^{-1}P(xh) = P$. پس $xh \in N_G(P)$ یا $x\in N_G(P)H$. درنتیجه $G=N_G(P)H$. □

سؤال ۵: فرض کنید $a\in R$ عضو خودتوان دلخواهی باشد. پس $a^2=a$. برای هر $r\in R$ به راحتی دیده می شود که

$$(ra-ara)^2=0,$$
$$(ar-ara)^2=0.$$

اما R فاقد عضو پوچ توان غیرصفر است، لذا $ra-ara=0$ و $ar-ara=0$ که نتیجه می دهد $ra=ar$. اکنون با توجه به اینکه $r\in R$ دلخواه است نتیجه می گیریم a در مرکز حلقهٔ R قرار دارد. □

سؤال ۶: فرض کنید $a,b\in R$ دو عضو دلخواه باشند. اگر $a=0$ آنگاه $ab=ba$. پس فرض می کنیم $a\neq 0$. به راحتی دیده می شود که $C(a)=\{x\in R \mid ax=xa\}$ زیرحلقه ای از R است. درنتیجه بنابر فرض $C(a)$ ایده آلی از R خواهد بود و چون $a\in C(a)$، پس $ab\in C(a)$. لذا $a(ab)=(ab)a$ و چون $a\neq 0$ و R فاقد مقسوم علیه صفر است پس $ab=ba$. درنتیجه R جابه جایی است. □

سؤال ۷: به راحتی دیده می شود که تابع $f: M_n(R)\to M_n(R/I)$ با ضابطهٔ $f([a_{ij}])=[a_{ij}+I]$ یک همریختی پوشا با هستهٔ $M_n(I)$ است. پس $M_n(I)\trianglelefteq M_n(R)$ و بنابر قضیهٔ اول یکریختی $\frac{M_n(R)}{M_n(I)}\cong M_n(R/I)$. □