به‌نام خدا

دانشکدهٔ علوم ریاضی

امتحان پایان‌ترم جبر ۲

۲۱۸ – ۲۲

نیمسال دوم ۸۸—۸۷

تاریخ امتحان: ۸۸/۳/۲۷
مدّت امتحان: ۳ ساعت

سؤال ۱. ثابت کنید هر حوزهٔ صحیح که تعدادی متناهی ایده‌آل دارد میدان است.

سؤال ۲. فرض کنید R حلقهٔ متناهی مولد و I ایده‌آل سره‌ای از R باشد. ثابت کنید ایده‌آل ماکسیمال M از R وجود دارد که $I \subseteq M$.

سؤال ۳. فرض کنید R حلقهٔ جابه‌جایی باشد که یکدار نیست. ثابت کنید اگر $a \in R$ موجود باشد با این ویژگی که $R = \langle a \rangle$، آنگاه R ایده‌آل ماکسیمالی دارد که اوّل نیست.

سؤال ۴. صورت محک آیزنشتاین را بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۵. فرض کنید F میدان باشد. ثابت کنید $F[x,y]$ حوزهٔ تجزیهٔ یگانه‌ای است که حوزهٔ ایده‌آل اصلی نیست.

سؤال ۶. ثابت کنید هر حوزهٔ اقلیدسی یک حوزهٔ ایده‌آل اصلی است.

سؤال ۷. فرض کنید R حلقه، S زیرمجموعه‌ای ناتهی از R و P ایده‌آل اوّلی از R باشد. ثابت کنید اگر $S \nsubseteq P$، آنگاه $P = \{x \in R \mid \forall s \in S:\ xs \in P\}$.

سؤال ۸. فرض کنید R حلقهٔ جابه‌جایی و یکدار و n عددی طبیعی باشد. ثابت کنید اگر M ایده‌آل ماکسیمالی از R باشد، آنگاه حلقهٔ R/M^n دقیقاً یک ایده‌آل اوّل سره دارد.

سؤال ۹. فرض کنید F میدان باشد و R زیرحلقه‌ای از F با این ویژگی که برای هر عضو غیر صفر a از F، لااقل یکی از اعضای a یا a^{-1} در R واقع است. ثابت کنید R حلقهٔ موضعی است.

سؤال ۱۰. فرض کنید D یک حوزهٔ اقلیدسی با ارزیاب اقلیدسی ν باشد. ثابت کنید اگر a و b دو عضو غیر صفر از D باشند با این ویژگی که b غیر یکّه باشد، آنگاه $\nu(a) < \nu(ab)$.

توزیع نمره. هر سؤال ۱۰ نمره دارد.

مجموع: ۱۰۰ نمره