به‌نام خدا

دانشکدهٔ علوم ریاضی

امتحان میان‌ترم جبر جابه‌جایی

تاریخ امتحان: ۸۸/۲/۱۷

مدّت امتحان: ۳ ساعت

---

۲۲ − ۲۴۳+

نیمسال دوم ۸۸−۸۷

توجه: در این امتحان منظور از حلقه، حلقهٔ جابه‌جایی و یکدار است که در آن $1 \neq 0$. برای هر زیرحلقهٔ S از حلقهٔ R، $1_S = 1_R$ و برای هر هم‌ریختی حلقه‌ای $\varphi : R \longrightarrow R'$، $\varphi(1_R) = 1_{R'}$. هم‌چنین منظور از R−مدول M، R−مدول چپ M است که با ضرب در اسکالر $m.r := rm$ ساختار R−مدول راست دارد.

سؤال ۱. ثابت کنید اگر R حلقهٔ آرتینی باشد، آنگاه رادیکال جیکوبسن R، یعنی $J(R)$، ایده‌آلی پوچ‌توان از R است.

سؤال ۲. فرض کنید R حلقه باشد و M را R−مدول در نظر بگیرید. ثابت کنید اگر برای هر $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$، $M_{\mathfrak{m}}$ به‌عنوان $R_{\mathfrak{m}}$−مدول یکدست باشد، آنگاه M به‌عنوان R−مدول یکدست است.

سؤال ۳. فرض کنید R حلقه باشد و M را R−مدولی متناهی مولد در نظر بگیرید. ثابت کنید اگر S زیر مجموعهٔ بستهٔ ضربی از R باشد و انبساط و انقباض ایده‌آل‌ها با هم‌ریختی طبیعی $\varphi : R \longrightarrow S^{-1}R$ انجام شود، آنگاه

$$\mathrm{Supp}_{S^{-1}R}(S^{-1}M) = \{\mathfrak{p}^e \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R(M),\ \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}.$$

سؤال ۴. فرض کنید R حلقه باشد و I را ایده‌آلی تجزیه‌پذیر از R در نظر بگیرید. هم‌چنین S را زیر مجموعهٔ بستهٔ ضربی از R در نظر بگیرید و فرض کنید انبساط و انقباض ایده‌آل‌ها با هم‌ریختی طبیعی $\varphi : R \longrightarrow S^{-1}R$ انجام شود. مجموعه‌های $\mathrm{ass}_{S^{-1}R}(I^e)$ و $\mathrm{ass}_R(I^{ec})$ را مشخص کنید. (نوشتن صورت و اثبات گزاره‌ای که این مجموعه‌ها را مشخص می‌کند نیز لازم است!)

سؤال ۵. صورت قضیهٔ دوم یگانگی تجزیهٔ اوّلیهٔ مینیمال را بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۶. فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ حلقهٔ موضعی و نوتری باشد که با متریک $\mathfrak{m}$−ادیک تمام است. هم‌چنین I را ایده‌آلی سره از R در نظر بگیرید. ثابت کنید اگر $\{\mathfrak{p}_n\}_{n=1}^{\infty}$ خانواده‌ای شمارا از ایده‌آل‌های اوّل R باشد با این ویژگی که $I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{p}_n$، آنگاه $n \geq 1$ وجود دارد که $I \subseteq \mathfrak{p}_n$.

سؤال ۷. فرض کنید R حلقهٔ نوتری باشد و I و J را ایده‌آل‌هایی از R در نظر بگیرید. ثابت کنید اگر برای هر $\mathfrak{p} \in \mathrm{ass}_R(I)$ داشته باشیم $JR_{\mathfrak{p}} \subseteq IR_{\mathfrak{p}}$، آنگاه $J \subseteq I$.

سؤال ۸. فرض کنید R حلقهٔ نوتری باشد و $x \in R$ و I را ایده‌آلی از R در نظر بگیرید. ثابت کنید اگر $x \notin \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{ass}_R(I)} \mathfrak{p}$، آنگاه $\langle x \rangle \cap I = \langle x \rangle I$.

توزیع نمره. سؤال‌های ۱ تا ۶: هر کدام ۸ نمره، سؤال‌های ۷ و ۸: هر کدام ۱۶ نمره.

مجموع: ۸۰ نمره