



تاریخ امتحان: ۸۸/۳/۳۰
مدت امتحان: ۳/۵ ساعت

امتحان پایان ترم جبر جابه جایی

۲۲ - ۲۴۳+

نیمسال دوم ۸۸-۸۷

توجه: در این امتحان منظور از حلقه، حلقه جابه جایی و یکدار است که در آن $1 \neq 0$. برای هر زیرحلقه S از حلقه R ، $1_S = 1_R$ و برای هر هم‌ریختی حلقه‌های $R' \rightarrow R$ ، $\varphi(1_R) = 1_{R'}$. هم‌چنین منظور از R -مدول M ، R -مدول چپ M است که با ضرب در اسکالر $m.r := rm$ ساختار R -مدول راست دارد.

سؤال ۱. فرض کنید R حلقه و M یک R -مدول نوتری باشد. ثابت کنید اگر $B \subseteq \text{Ass}_R(M)$ ، آنگاه زیرمدول N از M موجود است که $\text{Ass}_R(N) = \text{Ass}_R(M) \setminus B$ و $\text{Ass}_R(M/N) = B$.

سؤال ۲. صورت قضیه مقایسه ناپذیری را بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۳. فرض کنید S حلقه و R زیرحلقه‌ای از آن باشد. ثابت کنید اگر S به عنوان R -مدول متناهی مولد باشد، آنگاه برای هر $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$ ،
 $|\{\mathfrak{q} \in \text{Spec}(S) \mid \mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}\}| < \infty$.

سؤال ۴. صورت تعمیم یافته قضیه ایده آل اصلی کرول را بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۵. ثابت کنید هر حلقه موضعی منظم حوزه صحیح است. (صورت هر سه لم مورد نیاز بایستی به طور دقیق نوشته شوند!)

سؤال ۶. فرض کنید S حلقه و G زیرگروهی متناهی از $\text{Aut}(S)$ باشد. زیرمجموعه R از S را به صورت

$$R = \{s \in S \mid \forall \sigma \in G: \sigma(s) = s\}$$

تعریف می‌کنیم. به وضوح R زیرحلقه S است که زیرحلقه G -پای S نامیده می‌شود.

الف) ثابت کنید S روی R صحیح است.

ب) فرض کنید $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$ و قرار دهید $A = \{\mathfrak{q} \in \text{Spec}(S) \mid \mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}\}$. ثابت کنید اگر $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \in A$ ، آنگاه $\mathfrak{q}_2 \subseteq \bigcup_{\sigma \in G} \sigma(\mathfrak{q}_1)$ و نتیجه بگیرید $\sigma \in G$ موجود است که $\sigma(\mathfrak{q}_1) = \mathfrak{q}_2$.

ج) ثابت کنید برای هر $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(S)$ داریم $\text{ht}_S(\mathfrak{q}) = \text{ht}_R(\mathfrak{q} \cap R)$.

د) ثابت کنید $\dim(S) = \dim(R)$.

توزیع نمره. سؤال‌های ۱ تا ۵: هر کدام ۱۵ نمره، سؤال ۶: قسمت‌های (الف) و (د) هر کدام ۵ نمره، قسمت (ب) ۱۵ نمره و قسمت (ج) ۲۰ نمره.

مجموع: ۱۲۰ نمره