به‌نام خدا

دانشکدهٔ علوم ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۸/۸/۲۸
مدّت امتحان: ۳ ساعت

امتحان میان‌ترم نظریهٔ مقدماتی معادلات دیفرانسیل عادی

۲۲ − ۳۸۴

نیمسال اوّل ۸۹−۸۸

سؤال ۱. فرض کنید $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ یک میدان باشد و $(t_\circ, x_\circ) \in D$. بدون استفاده از قضایای نقطهٔ ثابت، نشان دهید اگر $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ تابعی پیوسته باشد، آنگاه عدد حقیقی $r > \circ$ وجود دارد که مسألهٔ مقدار اوّلیهٔ

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_\circ) = x_\circ \end{cases}$$

دارای جواب $x(t) = x(t, t_\circ, x_\circ)$ است که در بازهٔ $I = (t_\circ - r, t_\circ + r)$ تعریف شده است.

سؤال ۲. کلی‌ترین صورت ممکن قضیهٔ پیوستگی نسبت به شرط اوّلیه را بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۳. صورت قضیهٔ وجود سرتاسری را بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۴. فرض کنید تابع $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دارای این ویژگی باشد که به ازای هر $(t_\circ, x_\circ) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$، مسألهٔ مقدار اوّلیهٔ

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_\circ) = x_\circ \end{cases}$$

دارای جواب یگانهٔ $x(t, t_\circ, x_\circ)$ است. ثابت کنید اگر $x_۱$ و $x_۲$ دو عدد حقیقی باشند که $x_۱ < x_۲$، آنگاه به‌ازای هر $t \geq t_\circ$، $x(t, t_\circ, x_۱) < x(t, t_\circ, x_۲)$.

سؤال ۵. نشان دهید به ازای هر $(t_\circ, x_\circ) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$، مسألهٔ مقدار اوّلیهٔ

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\exp(-x^۴ \cos^۴ t)}{۳ + t^٦ \sin^۲ t} \\ x(t_\circ) = x_\circ \end{cases}$$

دارای جواب یگانه‌ای است که در سرتاسر $\mathbb{R}$ تعریف شده است.

سؤال ٦. فرض کنید $I \subseteq \mathbb{R}$ بازه‌ای شامل صفر باشد. نشان دهید معادلهٔ دیفرانسیلی به‌صورت $x'' + a_۱(t)x' + a_۲(t)x = \circ$ که در آن $a_۱$ و $a_۲$ توابعی پیوسته در I هستند وجود ندارد که $x_۱(t) = t^۵$ و $x_۲(t) = t^۷$ دو جواب برای آن باشند.

توزیع نمره. سؤال‌های ۱ و ۲ و ۳: هر کدام ۱٦ نمره، سؤال‌های ۴ و ۵: هر کدام ۱۲ نمره، سؤال ٦: ۸ نمره.

مجموع: ۸۰ نمره