به‌نام خدا

دانشکدهٔ علوم ریاضی

امتحان پایان‌ترم نظریهٔ مقدماتی معادلات دیفرانسیل عادی

تاریخ امتحان: ۸۸/۱۰/۱۹

مدّت امتحان: ۴ ساعت

۲۲ – ۳۸۴

نیمسال اوّل ۸۹–۸۸

سؤال ۱. فرض کنید A یک ماتریس مربعی باشد. الگوریتم Putzer که الگوریتمی برای محاسبهٔ e^{tA} است چیست؟ چرا این الگوریتم کار می‌کند؟ با استفاده از این الگوریتم، e^{tA} را برای ماتریس زیر محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۳ & ۵ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

سؤال ۲. صورت قضیهٔ Floquet را بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۳. فرض کنید $A(t)$ ماتریسی مربعی از مرتبهٔ n باشد که درآیه‌های آن توابعی از t هستند و در $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند. برای عضوِ غیرصفرِ v از $\mathbb{R}^n$، نمای Liapunov دستگاه $X' = A(t)X$ نسبت به v را به‌طور دقیق تعریف کنید. اگر $A(t)$ ماتریسی T–تناوبی فرض شود، آنگاه نمای Liapunov دستگاه داده شده نسبت به یک vی خاص با یکی از شاخص‌های وابسته به این دستگاه برابر است. آن v چیست؟ آن شاخص کدام است؟ چرا؟

سؤال ۴. صورت قضیه‌ای که وضعیت نقطهٔ بحرانی ماریپیچ در دستگاه‌های خطی و تقریباً خطی را مقایسه می‌کند بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۵. معادلهٔ دیفرانسیلِ $y'' - a(t)y' + b(t)y = ۰$ را در نظر بگیرید که در آن a و b توابعی حقیقی، T– تناوبی و پیوسته در $\mathbb{R}$ هستند. فرض کنید این معادله را به صورت $X' = A(t)X$ بنویسیم. ثابت کنید اگر $\eta_۱$ و $\eta_۲$ ضرایب مشخصهٔ $A(t)$ باشند، آنگاه $\eta_۱\eta_۲ = \exp\left(\int_۰^T a(s)ds\right)$. آیا به کمک این تساوی می‌توان رفتار دراز مدّت جواب‌های معادلهٔ داده شده را بررسی کرد؟

سؤال ۶. معادلهٔ دیفرانسیلِ $y'' - (\cos^۲ t)y' + b(t)y = ۰$ را در نظر بگیرید که در آن b تابعی حقیقی، π– تناوبی و پیوسته در $\mathbb{R}$ است. ثابت کنید این معادله جوابی دارد، مثلاً $y = y(t)$، با این ویژگی که $\lim_{t\to\infty} y(t) = \infty$.

سؤال ۷. نقاط بحرانی دستگاه معادلات دیفرانسیلِ غیرخطیِ زیر را به‌دست آورید. وضعیت هر نقطهٔ بحرانی را، از نظر پایداری، پایداری مجانبی یا ناپایداری، بررسی کنید و نمای فاز دستگاه را در همسایگی هر نقطهٔ بحرانی رسم کنید.

$$\begin{cases} x' = -۲x + ۲x^۲ \\ y' = -۳x + y + ۳x^۲ \end{cases}$$

سؤال ۸. دستگاه معادلات دیفرانسیلِ غیرخطیِ زیر را با استفاده از مختصات قطبی حل کنید. نشان دهید دایرهٔ واحد مداری از این دستگاه است. اگر $(x(t), y(t))$ جوابی از این دستگاه باشد، $\lim_{t\to\infty}(x^۲(t) + y^۲(t))$ را به‌دست آورید.

$$\begin{cases} x' = -y - x(x^۲ + y^۲ - ۱) \\ y' = x - y(x^۲ + y^۲ - ۱) \end{cases}$$

توزیع نمره. هر سؤال ۱۵ نمره دارد.

مجموع: ۱۲۰ نمره