



تاریخ امتحان: ۸۸/۸/۲۸  
مدت امتحان: ۴ ساعت

امتحان میان‌ترم جبر همولوژی

۲۲ - ۲۴۶+

نیمسال اول ۸۹-۸۸

توجه: در این امتحان منظور از حلقه، حلقه یک‌دار است که در آن  $1 \neq 0$ . برای هر زیرحلقه  $S$  از حلقه  $R$ ،  $1_S = 1_{R'}$  و برای هر هم‌ریختی حلقه‌ای  $\varphi: R \rightarrow R'$ ،  $\varphi(1_R) = 1_{R'}$ .

سؤال ۱. صورت لم مار را بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۲. صورت قضیه مقایسه را در حالت پروژکتیو بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۳. فرض کنید  $R$  و  $S$  دو حلقه باشند. هم‌چنین  $M_S$  و  $M_R$  را به ترتیب رسته  $R$ -مدول‌های راست و  $S$ -مدول‌های راست در نظر بگیرید و فرض کنید  $T: M_R \rightarrow M_S$  تابعگونی همورد جمعی باشد. الف) تابعگونی مشتق شده  $n$ م چپ از  $T$ ، یعنی  $L_n T(-)$ ، را به‌طور دقیق تعریف کنید و خوش تعریفی آن را بررسی کنید.

ب) برای  $R$ -مدول چپ  $B$ ،  $\text{tor}_n^R(-, B)$  را تعریف کنید.

ج) برای  $R$ -مدول راست  $A$ ،  $\text{Tor}_n^R(A, -)$  را چگونه تعریف می‌کنید؟ توضیح دهید.

سؤال ۴. صورت لم نعل اسب را در حالت پروژکتیو بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۵. فرض کنید  $R$  و  $S$  دو حلقه باشند. هم‌چنین  $M_S$  و  $M_R$  را به ترتیب رسته  $R$ -مدول‌های راست و  $S$ -مدول‌های راست در نظر بگیرید و فرض کنید  $T: M_R \rightarrow M_S$  تابعگونی همورد جمعی باشد. الف) صورت حکم «از اثر تابعگونی مشتق شده چپ از  $T$  روی یک دنباله دقیق کوتاه، یک دنباله دقیق بلند القا می‌شود» را به‌طور دقیق بنویسید و آن را ثابت کنید.

ب) برای  $R$ -مدول چپ  $B$ ، صورت حکم مذکور را برای  $\text{tor}^R(-, B)$  بنویسید.

ج) برای  $R$ -مدول راست  $A$ ، صورت حکمی مشابه با حکم مذکور را برای  $\text{Tor}^R(A, -)$  بنویسید.

سؤال ۶. فرض کنید  $R$  حلقه،  $A$  یک  $R$ -مدول راست و  $B$  یک  $R$ -مدول چپ باشد.

الف) برای تحلیل پروژکتیو داده شده‌ای از  $A$ ،  $R$ -مدول راست  $K_n$  را تعریف کنید. نشان دهید برای هر

$$\text{tor}_{n+2}^R(A, B) \cong \text{tor}_1^R(K_n, B), n \geq 0.$$

ب) صورت حکمی مشابه با حکم قسمت الف) را وقتی که برای  $B$  یک تحلیل پروژکتیو در نظر می‌گیریم

بنویسید.

**سؤال ۷.** فرض کنید  $R$  حلقه،  $A$  یک  $R$ -مدول راست و  $B$  یک  $R$ -مدول چپ باشد. ثابت کنید برای هر  $n \geq 0$ ،  $\text{tor}_n^R(A, B) \cong \text{Tor}_n^R(A, B)$ .

**سؤال ۸.** فرض کنید  $R$  یک حلقه باشد با این ویژگی که هر ایده آل چپ آن به عنوان  $R$ -مدول چپ پروژکتیو است. برای هر دو  $R$ -مدول چپ  $A$  و  $B$  و برای هر  $n \geq 2$ ،  $\text{Ext}_R^n(A, B)$  را شناسایی کنید. (قضیه کاپلانسکی را دانسته فرض کنید: اگر  $R$  یک حلقه باشد با این ویژگی که هر ایده آل چپ آن به عنوان  $R$ -مدول چپ پروژکتیو است، آنگاه هر زیرمدول یک  $R$ -مدول چپ آزاد با جمع مستقیمی از ایده آل‌های چپ  $R$  یکریخت است.)

توزیع نمره. هر سؤال ۱۰ نمره دارد.

مجموع: ۸۰ نمره