به‌نام خدا

دانشکدهٔ علوم ریاضی

امتحان پایان‌ترم جبر همولوژی

تاریخ امتحان: ۸۸/۱۰/۲۳
مدّت امتحان: ۴ ساعت

---

۲۲ – ۲۴۶+

نیمسال اوّل ۸۹—۸۸

توجه: در این امتحان منظور از حلقه، حلقهٔ یکدار است که در آن $1 \neq 0$. برای هر زیرحلقهٔ S از حلقهٔ R، $1_S = 1_R$ و برای هر هم‌ریختی حلقه‌ای $\varphi : R \longrightarrow R'$، $\varphi(1_R) = 1_{R'}$.

سؤال ۱. فرض کنید R حلقه و A یک R—مدول راست باشد. ثابت کنید اگر برای هر R—مدول چپِ B، $\operatorname{Tor}_1^R(A, B) = 0$، آنگاه A یکدست است.

سؤال ۲. فرض کنید R حلقه، $\{A_i\}_{i\in\Lambda}$ خانواده‌ای ناتهی از R—مدول‌ها و B یک R—مدول باشد. ثابت کنید برای هر $n \geq 0$،

$$\operatorname{Ext}_R^n\Big(\coprod_{i\in\Lambda} A_i, B\Big) \cong \prod_{i\in\Lambda} \operatorname{Ext}_R^n(A_i, B).$$

سؤال ۳. صورت قضیه‌ای را که به فرمولِ تانسوری Künneth معروف است بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۴. فرض کنید R حلقه و A یک R—مدول چپ باشد و $0 \leq n < \infty$. ثابت کنید $\ell\mathrm{pd}(A) \leq n$ اگر و فقط اگر تابعگون $\operatorname{Ext}_R^n(A, -)$ دقیقِ راست باشد.

سؤال ۵. ثابت کنید بعد سرتاسری چپ یک حلقهٔ نوتری با بعد سرتاسری راست آن برابر است.

سؤال ۶. فرض کنید R حلقهٔ موروثی چپ، A یک R—مدول راست و $\mathbf{C}$ هم‌بافتی از R—مدول‌های چپ باشد. ثابت کنید $\operatorname{Tor}_1^R(A, \mathbf{Z}(\mathbf{C})) = 0 = \operatorname{Tor}_1^R(A, \mathbf{B}(\mathbf{C}))$ اگر و فقط اگر $\operatorname{Tor}_1^R(A, \mathbf{C}) = 0$.

سؤال ۷. فرض کنید R حلقه و B یک R—مدول چپ باشد و $1 \leq n < \infty$. ثابت کنید اگر $\ell\mathrm{id}(B) = n$، آنگاه R—مدول چپِ انژکتیو E وجود دارد با این ویژگی که $\operatorname{Ext}_R^n(E, B) \neq 0$.

سؤال ۸. برای $\mathbb{Z}$—مدول‌های $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z}$، با ذکر دلیل $\mathrm{pd}(\mathbb{Q})$، $\mathrm{id}(\mathbb{Z})$، $\ell\mathrm{D}(\mathbb{Z})$ و $\mathrm{rD}(\mathbb{Z})$ را محاسبه کنید.

توزیع نمره. هر سؤال ۱۵ نمره دارد.

مجموع: ۱۲۰ نمره