



تاریخ امتحان: ۸۹/۲/۲
مدت امتحان: ۳ ساعت

امتحان میان‌ترم جبر همولوژی ۲

۲۲ - ۲۴۷+

نیمسال دوم ۸۸-۸۹

توجه: در این امتحان منظور از حلقه، حلقه جابه‌جایی و یک‌دارِ نوتری است که در آن $1 \neq 0$. برای هر زیرحلقه S از حلقه R ، $1_S = 1_R$ و برای هر هم‌ریختی حلقه‌ای $\varphi: R \rightarrow R'$ ، $\varphi(1_R) = 1_{R'}$. هم‌چنین منظور از R -مدول M ، R -مدول چپ M است که با ضرب در اسکالر $m.r := rm$ ساختار R -مدول راست دارد.

سؤال ۱. فرض کنید R یک حلقه و α ایده‌الی از R باشد. برای هر $i, i \geq 0$ ، تابعگونی همورد $H_\alpha^i(-)$ را به‌طور دقیق تعریف کنید. به‌طور مختصر توضیح دهید که چرا $H_\alpha^i(-)$ با تابعگونی $\lim_{n \in \mathbb{N}} \text{Ext}_R^i(R/\alpha^n, -)$ هم‌ارز طبیعی است.

سؤال ۲. فرض کنید R یک حلقه و α ایده‌الی از R باشد. ثابت کنید اگر M یک R -مدول باشد با این ویژگی که $\text{NonZdv}_R(M) \cap \alpha \neq \emptyset$ ، آنگاه $\Gamma_\alpha(M) = 0$. نشان دهید اگر M متناهی مولد فرض شود، عکس حکم مذکور نیز برقرار است.

سؤال ۳. فرض کنید R یک حلقه، α ایده‌الی از R و M یک R -مدول باشد. ثابت کنید اگر α شامل یک M -رشته ضعیف به طول r باشد، آنگاه برای هر $i, 0 \leq i \leq r-1$ ، $H_\alpha^i(M) = 0$. نشان دهید اگر M متناهی مولد فرض شود، عکس حکم مذکور نیز برقرار است.

سؤال ۴. فرض کنید R یک حلقه و α ایده‌الی از R باشد. ثابت کنید اگر I یک R -مدول انژکتیو باشد، آنگاه $\Gamma_\alpha(I)$ نیز چنین است. با استفاده از این حکم، برای R -مدول α -تابدارِ دلخواه M ، تحلیل انژکتیو مناسبی بسازید که نتیجه بگیرید برای هر $i, i \geq 1$ ، $H_\alpha^i(M) = 0$.

سؤال ۵. فرض کنید R یک حلقه، α ایده‌الی از R و M یک R -مدول باشد. هم‌چنین فرض کنید S یک زیرمجموعه بسته ضربی از R باشد با این ویژگی که $S \cap \alpha \neq \emptyset$ و $\text{Zdv}_R(M) \cap S = \emptyset$. اگر $j: M \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (M :_{S^{-1}M} \alpha^n)$ هم‌ریختی جزئیت و $\eta_M: M \rightarrow D_\alpha(M)$ هم‌ریختی استاندارد باشد، ثابت کنید R -یک‌ریختی منحصر به فرد $\psi'_M: \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (M :_{S^{-1}M} \alpha^n) \rightarrow D_\alpha(M)$ وجود دارد که $\psi'_M j = \eta_M$. به‌طور مختصر توضیح دهید چگونه از این حکم نتیجه می‌شود که اگر α یک ایده‌ال اصلی باشد، آنگاه برای هر $i, i \geq 2$ ، $H_\alpha^i(M) = 0$.

توزیع نمره. هر سؤال ۱۶ نمره دارد.

مجموع: ۸۰ نمره