به‌نام خدا

دانشکدهٔ علوم ریاضی

امتحان میان‌ترم توپولوژی ۱

۲۲ – ۵۵۶

نیمسال دوم ۸۹–۸۸

تاریخ امتحان: ۸۹/۲/۹
مدّت امتحان: ۴ ساعت

سؤال ۱. الف) فرض کنید (X,d) یک فضای متریک جدایی پذیر و Y زیرفضایی از X باشد. ثابت کنید Y نیز جدایی پذیر است.

ب) مجموعهٔ $X = B(\mathbb{N},\mathbb{R})$ را معرفی کرده و آن را به متریکی مثل d مجهز کنید با این ویژگی که (X,d) یک فضای متریک جدایی پذیر نباشد. برای نشان دادن این‌که (X,d) جدایی پذیر نمی‌باشد، از قسمت (الف) استفاده کنید.

سؤال ۲. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد. ثابت کنید (X,d) تکمیل دارد و این تکمیل با تقریب یکریختی ایزومتریک منحصر به فرد است.

سؤال ۳. صورت قضیهٔ میتاگ–لفلر را بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۴. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد. ثابت کنید X فشرده است اگر و فقط اگر کامل و کراندار کلی باشد.

سؤال ۵. هر یک از احکام زیر را که درست است ثابت کنید و برای هر یک که نادرست است مثالی ناقض ارائه کنید.

الف) فرض کنید E یک فضای خطی نرم‌دار روی $\mathbb{C}$ باشد و E را به متریک القا شده از نرم مجهز کنید. در این صورت برای هر $x_\circ \in E$ و هر $r > \circ$، $\overline{B_r(x_\circ)} = B_r[x_\circ]$.

ب) متریک اقلیدسی روی $\mathbb{R}^n$ با متریک راه‌آهن فرانسه روی آن هم ارز است.

ج) فرض کنید (X,d) یک فضای متریک کامل و U زیرمجموعه‌ای باز از X باشد. در این صورت فضای متریک (U,d_U) کامل است.

د) فرض کنید E یک فضای خطی نرم‌دار روی $\mathbb{C}$ باشد و E را به متریک القا شده از نرم مجهز کنید. در این صورت برای هر $x_\circ \in E$ و هر $r > \circ$، $\overline{B_r(x_\circ)}$ زیرمجموعه‌ای فشرده از E است.

سؤال ۶. فرض کنید E یک فضای خطی نرم‌دار روی $\mathbb{C}$ باشد و E را به متریک القا شده از نرم مجهز کنید. ثابت کنید اگر $S_1[0]$ کامل باشد آنگاه E فضای باناخ است.

سؤال ۷. فرض کنید $\mathbb{R}$ به متریک اقلیدسی مجهز باشد و (X,d) را یک فضای متریک در نظر بگیرید با این ویژگی که هر تابع پیوستهٔ $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ ماکزیمم مطلق خود را در نقطه‌ای از X اختیار کند. ثابت کنید X کامل است.

سؤال ۸. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و $f:X\longrightarrow X$ یک ایزومتری روی X باشد. ثابت کنید اگر X فشرده باشد آنگاه f پوشا است.

توزیع نمره. سؤال ۱: ۷+۳=۱۰ نمره،
سؤال‌های ۲، ۳، ۴، ۶، ۷ و ۸ هر کدام ۸ نمره و
سؤال ۵: ۳+۳+۳+۳=۱۲ نمره.

مجموع: ۷۰ نمره