دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی
صندوق پستی ۹۴۱۵-۱۱۱۵۵ تهران
sharif university of technology
department of mathematical sciences
p o box 11155-9415, tehran, iran

شماره:
تاریخ: ۸۹/۲/۹
پیوست:

حل مسایل امتحان میان‌ترم توپولوژی ۱

سؤال ۱: الف) قضیهٔ ۲.۲.۱۷ ، ب) مثال ۲.۲.۱۸ (b).

سؤال ۲: لم ۲.۴.۱۲ + قضیهٔ ۲.۴.۱۳.

سؤال ۳: قضیهٔ ۲.۴.۱۴.

سؤال ۴: قضیهٔ ۲.۵.۱۰ ($i \Leftrightarrow ii$).

سؤال ۵: الف) مثال ۲.۲.۱۴(c) ، ب) مثال ۲.۳.۱۳(c)،
ج) گزارهٔ ۲.۴.۷ ، د) مثال ۲.۵.۱۳.

سؤال ۶: فرض کنید (x_n) یک دنبالهٔ کشی در E باشد. با توجه به نامساوی $\big|\|x_n\|-\|x_m\|\big|\le\|x_n-x_m\|$ نتیجه می‌گیریم که $(\|x_n\|)$ دنباله‌ای کشی در $\mathbb{R}$ است و لذا به نقطه‌ای از $\mathbb{R}$ همگرا خواهد بود. مثلاً فرض کنید $\|x_n\|\to a$ $(a\in\mathbb{R})$. اگر $a=0$، آنگاه $\|x_n\|\to 0$ و لذا $x_n\to 0$. پس در این حالت (x_n) به نقطه‌ای از E همگراست. اگر $a\neq 0$، آنگاه بدون کاسته شدن از کلیت بحث می‌توان فرض کرد عدد حقیقی مثبت k موجود است که به ازای هر $n\in\mathbb{N}$، $\frac{1}{\|x_n\|}\le k$.
پس به ازای هر $n,m\in\mathbb{N}$ داریم:

$$\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|}-\frac{x_m}{\|x_m\|}\right\|=\left\|\frac{\|x_m\|(x_n-x_m)-(\|x_n\|-\|x_m\|)x_m}{\|x_n\|\,\|x_m\|}\right\|\le 2k\|x_n-x_m\|.$$

این نشان می‌دهد $\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)$، که دنباله‌ای در $S_1[0]$ می‌باشد، کشی است و چون $S_1[0]$ کامل است لذا به نقطه‌ای از E همگرا خواهد بود. مثلاً فرض کنید $\frac{x_n}{\|x_n\|}\to x$ $(x\in E)$. درنتیجه $x_n=\|x_n\|\frac{x_n}{\|x_n\|}\to ax$. پس در این حالت نیز (x_n) به نقطه‌ای از E همگراست. پس ثابت کرده‌ام که هر دنبالهٔ کشی در E به نقطه‌ای از E همگراست و لذا E فضای باناخ است. ∎

سؤال ۷: می‌دانیم فضای متریک کامل $(\tilde{X},\tilde{d})$ و ایزومتری $i:X\to\tilde{X}$ موجود است طوری که $\tilde{X}=\overline{i(X)}$. فرض کنید $a\in\tilde{X}$ نقطه‌ای دلخواه باشد. تابع $f:X\to\mathbb{R}$ را با ضابطهٔ $f(x)=-\tilde{d}(i(x),a)$ تعریف می‌کنیم. برای هر $x,y\in X$، نامساوی

$$|f(x)-f(y)|=|-\tilde{d}(i(x),a)+\tilde{d}(i(y),a)|\le\tilde{d}(i(x),i(y))=d(x,y),$$

نشان می‌دهد که f بر X پیوسته است. پس بنا بر فرض $x_0\in X$ موجود است که

$$f(x_0)=\sup\{f(x):x\in X\}=\sup\{-\tilde{d}(i(x),a):x\in X\}$$
$$=-\inf\{\tilde{d}(i(x),a):x\in X\}=-\tilde{d}(i(X),a)$$
$$=-\tilde{d}(\overline{i(X)},a)=-\tilde{d}(\tilde{X},a)=0.$$

پس $\tilde{d}(i(x_0),a)=0$ و لذا $a=i(x_0)\in i(X)$. پس $\tilde{X}=i(X)$ و لذا $i(X)$ کامل است. چون فضاهای X و $i(X)$ یکریخت ایزومتریک اند، پس X نیز کامل است. ∎

سؤال ۸: فرض کنید $x\in X$ نقطه‌ای دلخواه باشد. دنبالهٔ $(f^n(x))$ را در نظر می‌گیریم که f^n یعنی ترکیب f با خودش n مرتبه. چون X فشرده است، دنبالهٔ مذکور زیردنباله‌ای دارد، مثلاً $(f^{n_i}(x))$، که به نقطه‌ای از X همگراست و لذا کشی است. پس برای $\varepsilon>0$ داده شده، عدد طبیعی k وجود دارد که اگر $i>j>k$، آنگاه $d(f^{n_i}(x),f^{n_j}(x))<\varepsilon$. در نتیجه ایزومتری بودن f ایجاب می‌کند که برای $i>j>k$، $d(f^{n_i-n_j}(x),x)<\varepsilon$ و لذا $f^{n_i-n_j}(x)\in B_\varepsilon(x)$. پس برای $\varepsilon>0$ داده شده، $B_\varepsilon(x)\cap f(X)\neq\emptyset$. این نیز نشان می‌دهد که $\overline{f(X)}=X$. اما ایزومتری‌ها پیوسته اند و چون X فشرده است، پس $f(X)$ نیز فشرده و در نتیجه در X بسته خواهد بود. پس $f(X)=X$ و لذا f پوشا است. ∎

tel: (+98 21) 66005217
fax: (+98 21) 66005117
www.mathsci.sharif.ir
mathinfo@sharif.ir
تلفن (۰۲۱) ۶۶۰۰۵۲۱۷
نمابر (۰۲۱) ۶۶۰۰۵۱۱۷