به‌نام خدا

دانشکدهٔ علوم ریاضی

امتحان پایان‌ترم توپولوژی ۱

تاریخ امتحان: ۸۹/۳/۲۹
مدّت امتحان: ۳/۵ ساعت

———————————

۲۲ – ۵۵۶

———————————

نیمسال دوم ۸۹—۸۸

سؤال ۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. ثابت کنید X فشرده است اگر و فقط اگر هر تور در X زیرتوری همگرا داشته باشد.

سؤال ۲. صورت قضیهٔ فشرده سازی تک نقطه‌ای آلکساندروف را بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۳. صورت قضیهٔ متری سازی اوریسون را بنویسید و آن را ثابت کنید. (صورت و اثبات هر سه لم لازم نیز باید نوشته شود.)

سؤال ۴. هر یک از احکام زیر را که درست است ثابت کنید و برای هر یک که نادرست است مثالی ناقض ارائه کنید.

الف) هر زیرفضای یک فضای توپولوژیکِ جدایی پذیر، جدایی پذیر است.

ب) هر دنباله در یک فضای توپولوژیکِ فشرده، زیردنباله‌ای همگرا دارد.

ج) هر فضای توپولوژیکِ همبندِ مسیری، موضعاً همبند است.

د) هر فضای توپولوژیکِ هاسدورفِ موضعاً فشرده، کاملاً منظم است.

سؤال ۵. فرض کنید X و Y فضاهای توپولوژیک باشند و Y را فشرده در نظر بگیرید. هم‌چنین $X \times Y$ را به توپولوژی حاصل‌ضرب مجهز کنید.

الف) ثابت کنید افکنش $\pi_1 : X \times Y \longrightarrow X$ هر زیرمجموعهٔ بسته از $X \times Y$ را به زیرمجموعه‌ای بسته از X می‌افکند.

ب) ثابت کنید اگر نمودار تابع $f : X \longrightarrow Y$، یعنی $G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$، زیرمجموعه‌ای بسته از $X \times Y$ باشد، آنگاه f بر X پیوسته است.

سؤال ۶. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و $\sim$ یک رابطهٔ هم ارزی روی X باشد. هم‌چنین $X \times X$ را به توپولوژی حاصل‌ضرب و $X/\!\sim$ را به توپولوژی خارج‌قسمت مجهز کنید. ثابت کنید اگر نگاشت خارج‌قسمتی $q : X \longrightarrow X/\!\sim$ هر زیرمجموعهٔ باز از X را به زیرمجموعه‌ای باز از $X/\!\sim$ بنگارد و $\sim$ در $X \times X$ بسته باشد، آنگاه $X/\!\sim$ هاسدورف است.

سؤال ۷. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک فشرده و موضعاً همبند باشد. آیا X می‌تواند نامتناهی مولفهٔ همبندی متمایز داشته باشد؟ چرا؟

سؤال ۸. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک نرمال باشد و $x_1, x_2 \in X$ ($x_1 \neq x_2$). آیا همسایگی بستهٔ E_1 از x_1 و همسایگی بستهٔ E_2 از x_2 وجود دارد طوری‌که $E_1 \cap E_2 = \emptyset$؟ چرا؟

توزیع نمره. سؤال ۱: ۱۲ نمره، سؤال ۲: ۱۰ نمره،
سؤال ۳: ۲۵ نمره، سؤال ۴: ۴+۴+۴+۴=۱٦ نمره،
سؤال ۵: ۱۰+۷=۱۷ نمره، سؤال ٦: ۱۰ نمره،
سؤال ۷: ۵ نمره، سؤال ۸: ۵ نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره