دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی
صندوق پستی ۹۴۱۵-۱۱۱۵۵ تهران

sharif university of technology
department of mathematical sciences
p o box 11155-9415, tehran, iran

شماره:
تاریخ: ۸۹/۳/۲۹
پیوست:

حل مسائل امتحان پایان ترم توپولوژی ۱

سؤال ۱: قضیهٔ ۳.۳.۱۸.

سؤال ۲: قضیهٔ ۳.۳.۲۶.

سؤال ۳: لم ۴.۱.۱ + قضیهٔ ۴.۱.۲ + لم ۴.۱.۷ + قضیهٔ ۴.۱.۱۰.

سؤال ۴: الف) مثال ۳.۱.۲۶ ، ب) مثال ۳.۳.۲۲ ، ج) مثال ۳.۴.۲۲ ، د) نتیجهٔ ۴.۱.۵.

سؤال ۵: الف) فرض کنید W زیرمجموعه‌ای بسته از $X\times Y$ باشد. باید ثابت کنیم $\pi_1(W)$ در X بسته است. برای این منظور فرض کنید $x\in X\setminus \pi_1(W)$ عضوی دلخواه باشد. در نتیجه اگر $y\in Y$ عضوی دلخواه باشد، $(x,y)\in X\times Y\setminus W$ و چون $X\times Y\setminus W$ زیرمجموعه‌ای باز از $X\times Y$ است، بنابر تعریف توپولوژی حاصل ضرب، زیرمجموعهٔ باز $U_{(x,y)}$ از X و زیرمجموعهٔ باز $V_{(x,y)}$ از Y وجود دارد که $(x,y)\in \pi_1^{-1}(U_{(x,y)})\cap \pi_2^{-1}(V_{(x,y)})\subseteq X\times Y\setminus W$. توجه می‌کنیم که $U_{(x,y)}$ شامل x و $V_{(x,y)}$ شامل y است. اکنون $\{V_{(x,y)} : y\in Y\}$ پوششی باز برای Y است و چون Y فشرده است، پس اعضای $y_1,\dots,y_n\in Y$ موجودند که $Y=V_{(x,y_1)}\cup\dots\cup V_{(x,y_n)}$. قرار می‌دهیم $U:=U_{(x,y_1)}\cap\dots\cap U_{(x,y_n)}$ که زیرمجموعه‌ای باز از X و شامل x است. به راحتی دیده می‌شود که $U\times Y\subseteq X\times Y\setminus W$ و لذا $x\in U\subseteq X\setminus \pi_1(W)$. چون x دلخواه بود، پس $X\setminus\pi_1(W)$ همسایگی هر نقطهٔ خودش است و لذا در X باز است. پس $\pi_1(W)$ در X بسته است.

ب) فرض کنید V زیرمجموعه‌ای بسته از Y باشد. می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= \{x\in X : f(x)\in V\} \\ &= \pi_1\left(\{(x,f(x))\in G(f) : (x,f(x))\in \pi_2^{-1}(V)\}\right) \\ &= \pi_1\left(G(f)\cap \pi_2^{-1}(V)\right). \end{aligned}$$

چون $G(f)$ و $\pi_2^{-1}(V)$ در $X\times Y$ بسته هستند، بنابر (الف) $f^{-1}(V)$ نیز در X بسته خواهد بود. پس f بر X پیوسته است. ∎

سؤال ۶: فرض کنید $[x_1]$ و $[x_2]$ دو عضو متمایز از $X/\sim$ باشند. پس $(x_1,x_2)\in X\times X\setminus\sim$. چون $X\times X\setminus \sim$ زیرمجموعه‌ای باز از $X\times X$ است، بنابر تعریف توپولوژی حاصل ضرب، زیرمجموعه‌های باز U_1 و U_2 از X موجودند که $(x_1,x_2)\in \pi_1^{-1}(U_1)\cap\pi_2^{-1}(U_2)\subseteq X\times X\setminus\sim$. توجه می‌کنیم که U_1 شامل x_1 و U_2 شامل x_2 است. اکنون بنابر فرض $q(U_1)$ و $q(U_2)$ در $X/\sim$ باز هستند و به راحتی دیده می‌شود که $[x_1]\in q(U_1)$، $[x_2]\in q(U_2)$ و $q(U_1)\cap q(U_2)=\emptyset$. پس $X/\sim$ هاسدورف است. ∎

سؤال ۷: خیر. فرض کنید $\mathcal{F}=\{A_i\}_{i\in I}$ مجموعهٔ تمام مؤلفه‌های همبندی متمایز X باشد. چون X موضعاً همبند است، $\mathcal{F}$ پوششی باز برای X است و چون X فشرده است پس تعداد متناهی از اعضای $\mathcal{F}$، X را می‌پوشانند. امّا با حذف عضوی از $\mathcal{F}$، $\mathcal{F}$ دیگر پوششی برای X نمی‌باشد. پس لزوماً I متناهی است. ∎

سؤال ۸: بله. چون X هاسدورف است، پس بازهای U_1 و U_2 به ترتیب شامل x_1 و x_2 موجودند که $U_1\cap U_2=\emptyset$. امّا نرمال بودن X نتیجه می‌دهد که زیرمجموعه‌های باز V_1 و V_2 از X موجودند که $x_1\in V_1\subseteq \overline{V_1}\subseteq U_1$ و $x_2\in V_2\subseteq\overline{V_2}\subseteq U_2$. پس کافی است قرار دهیم $E_1=\overline{V_1}$ و $E_2=\overline{V_2}$. ∎

tel: (+98 21) 66005217
fax: (+98 21) 66005117
www.mathsci.sharif.ir
mathinfo@sharif.ir
تلفن ۶۶۰۰۵۲۱۷ (۰۲۱)
نمابر ۶۶۰۰۵۱۱۷ (۰۲۱)