به‌نام خدا

دانشکدهٔ علوم ریاضی

امتحان میان‌ترم جبر جابه‌جایی ۲

تاریخ امتحان: ۸۹/۸/۲۰
مدّت امتحان: ۳/۵ ساعت

۲۲ − ۲۴۵+

نیمسال اوّل ۹۰−۸۹

توجه: در این امتحان منظور از حلقه، حلقهٔ جابه‌جایی و یکدار است که در آن $1 \neq 0$. برای هر زیرحلقهٔ S از حلقهٔ R، $1_R = 1_S$ و برای هر هم‌ریختی حلقه‌ای $\varphi : R \longrightarrow R'$، $\varphi(1_R) = 1_{R'}$. هم‌چنین منظور از R−مدول M، R−مدول چپ M است که با ضرب در اسکالر $m.r := rm$ ساختار R−مدول راست دارد.

سؤال ۱. فرض کنید $R = \bigoplus_{n\geq 0} R_n$ یک حلقهٔ مدرج باشد که به عنوانِ R_0−جبر متناهی مولد است و $M = \bigoplus_{n\geq 0} M_n$ را یک R−مدولِ مدرج در نظر بگیرید.

الف) ثابت کنید اگر حلقهٔ R_0 نوتری باشد، آنگاه حلقهٔ R نیز نوتری است.

ب) ثابت کنید اگر حلقهٔ R_0 آرتینی باشد و M یک R−مدول متناهی مولد، آنگاه به ازای هر $n \geq 0$، طول M_n به عنوان R_0−مدول، یعنی $\ell_{R_0}(M_n)$، متناهی است.

ج) با فرضِ برقراریِ شرایطِ قسمتِ (ب)، تابع هیلبرتِ وابسته به M، یعنی $\chi(M,-)$، را تعریف کنید. ثابت کنید اگر R_0−جبر R دارای r مولد باشد که همگی در R_1 واقع باشند، آنگاه $\chi(M,-)$ تابعی شبه چند جمله‌ای از درجهٔ حداکثر $r-1$ است.

سؤال ۲. صورت لمِ $\mathrm{Artin-Rees}$ را بنویسید و آن را ثابت کنید. اتحاد مهمی که این لم به‌دست می‌دهد را استخراج کنید.

سؤال ۳. فرض کنید R حلقه و M یک R−مدول باشد. ثابت کنید اگر $\{M_n\}_{n\geq 0}$ یک صافی برای M باشد، آنگاه $\hat{M} \cong \varprojlim (M/M_n)$.

سؤال ۴. فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ حلقهٔ موضعیِ نوتری و M یک R−مدول متناهی مولدِ ناصفر باشد. ثابت کنید برای هر $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\ M$ نامساویِ $\mathrm{depth}\ M \leq \dim R/\mathfrak{p}$ برقرار است.

سؤال ۵. فرض کنید R حلقه‌ای باشد با تعدادی متناهی ایده‌الِ ماکسیمال و M را یک R−مدول پروژکتیوِ متناهی مولد در نظر بگیرید. ثابت کنید اگر برای هرایده‌الِ ماکسیمالِ $\mathfrak{m}$ از R، تمام $M_\mathfrak{m}$ ها رتبهٔ برابر داشته باشند، آنگاه M آزاد است.

سؤال ٦. فرض کنید R حلقهٔ نوتری و I ایده‌الی از R باشد با این ویژگی که $I \subseteq J(R)$. ثابت کنید اگر $\mathrm{gr}_I(R)$ حوزهٔ صحیح باشد، آنگاه R نیز حوزهٔ صحیح است.

توزیع نمره. سؤال ۱: ۱۰+۱۰+۱۰=۳۰ نمره، بقیهٔ سؤال‌ها هر کدام ۱۰ نمره.

مجموع: ۸۰ نمره