به‌نام خدا

دانشکدهٔ علوم ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۹/۱۰/۲۶
مدّت امتحان: ۳/۵ ساعت

امتحان پایان‌ترم جبر جابه‌جایی ۲

۲۲ − ۲۴۵+

نیمسال اوّل ۹۰−۸۹

توجه: در این امتحان منظور از حلقه، حلقهٔ جابه‌جایی و یکدار است که در آن $۱ \neq ۰$. برای هر زیرحلقهٔ S از حلقهٔ R، $۱_R = ۱_S$ و برای هر هم‌ریختی حلقه‌ای $\varphi : R \longrightarrow R'$، $\varphi(۱_R) = ۱_{R'}$. هم‌چنین منظور از R−مدول M، R−مدول چپ M است که با ضرب در اسکالر $m.r := rm$ ساختار R−مدول راست دارد.

سؤال ۱. صورت قضیه‌ای که ارتباطِ بین چندجمله‌ای هیلبرت− ساموئل و دنباله‌های دقیق کوتاه را بیان می‌کند چیست؟ آن را ثابت کنید.

سؤال ۲. صورت قضیهٔ بُعد را بنویسید و آن را ثابت کنید. (صورت و اثبات هر سه لمِ لازم نیز باید نوشته شود.)

سؤال ۳. فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ حلقهٔ موضعیِ نوتری، $a \in \mathfrak{m}$ و M یک R−مدول کوهن− مکالی باشد. ثابت کنید a یک M−رشتهٔ منظم است اگر و فقط اگر $\dim M/aM = \dim M - ۱$.

سؤال ۴. صورت قضیه‌ای که در مورد تجزیهٔ مدول‌های انژکتیو به مدول‌های انژکتیوِ تجزیه‌ناپذیر است را بنویسید و آن را ثابت کنید. (صورت و اثبات هر دو لمِ لازم نیز باید نوشته شود.)

سؤال ۵. فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ حلقهٔ موضعیِ نوتری و M یک R−مدول متناهی مولد باشد. ثابت کنید

$$\text{inj dim } M = \sup\left\{i \mid \text{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, M) \neq ۰\right\}.$$

سپس نتیجه بگیرید که برای R−رشتهٔ منظم x، حلقهٔ R گرنشتاین است اگر و فقط اگر $R/\langle \mathrm{x} \rangle$ گرنشتاین باشد.

توزیع نمره. هر سؤال ۲۴ نمره دارد.

مجموع: ۱۲۰ نمره