دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی
صندوق پستی ۹۴۱۵-۱۱۱۵۵ تهران

sharif university of technology
department of mathematical sciences
p o box 11155-9415, tehran, iran

۸۹/۱۰/۲۸

حل مسایل امتحان نهایی از بخش دوم ریاضی مهندسی

سؤال ۱: ضرایب فوریهٔ f به صورت زیر می باشند:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{x}\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2+1}e^{x}(\cos nx+n\sin nx)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{2\,\mathrm{sh}\,\pi}{\pi}\times\frac{(-1)^n}{n^2+1}\ ;\quad n=0,1,2,\dots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{x}\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2+1}e^{x}(\sin nx-n\cos nx)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{2\,\mathrm{sh}\,\pi}{\pi}\times\frac{(-1)^n}{n^2+1}(-n)\ ;\quad n=1,2,\dots$$

پس سری فوریهٔ f به صورت زیر است:

$$\frac{\mathrm{sh}\,\pi}{\pi}+\frac{2\,\mathrm{sh}\,\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}(\cos nx-n\sin nx).$$

اکنون بنابر قضیهٔ فوریه، سری فوریهٔ f به ازای $x=\pi$ به $\frac{1}{2}(e^{\pi}+e^{-\pi})=\mathrm{ch}\,\pi$ همگراست، یعنی

$$\frac{\mathrm{sh}\,\pi}{\pi}+\frac{2\,\mathrm{sh}\,\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}(-1)^n=\mathrm{ch}\,\pi,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}=\frac{1}{2}(\pi\coth\pi-1),$$

و در نتیجه

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}=\pi\coth\pi. \quad ■$$

سؤال ۲: ضرایب فوریهٔ کسینوسی f به صورت زیر می باشند:

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-x}\cos x\cos\omega x\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(e^{-x}\cos(1+\omega)x+e^{-x}\cos(1-\omega)x\right)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_{0}^{\infty}\left(e^{-x+i(1+\omega)x}+e^{-x+i(1-\omega)x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-i(1+\omega)}+\frac{1}{1-i(1-\omega)}\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\times\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}.$$

پس انتگرال فوریهٔ کسینوسی f به صورت زیر است:

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos\omega x\,d\omega.$$

اکنون بنابر قضیهٔ انتگرال فوریه، مقدار انتگرال فوریهٔ f به ازای $x=2\pi$ برابر است با $e^{-2\pi}$، یعنی

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos 2\pi\omega\,d\omega=e^{-2\pi},$$

و در نتیجه

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+2}{x^4+4}\cos 2\pi x\,dx=\pi e^{-2\pi}. \quad ■$$

سؤال ۳: بنابر مطالب خوانده شده، مسألهٔ داده شده یک مسألهٔ اشتورم - لیوویل عادی است که مقادیر ویژهٔ آن مثبت هستند. فرض می‌کنیم $\lambda=\mu^2$ $(\mu>0)$. پس معادلهٔ $X''+\mu^2X=0$ را بدست می‌آوریم که جواب عمومی آن $X(x)=A\cos\mu x+B\sin\mu x$ است. شرط $X(0)=0$ ایجاب می‌کند که $A=0$ و لذا جواب به صورت $X(x)=B\sin\mu x$ تبدیل می‌شود. شرط $X(1)+X'(1)=0$ نیز ایجاب می‌کند که $B\sin\mu+B\mu\cos\mu=0$. پس اگر μ طوری باشد که $\sin\mu+\mu\cos\mu=0$ یا $\tan\mu=-\mu$، آنگاه به ازای Bهای غیرصفر جواب غیربدیهی بدست می‌آوریم. لذا اگر فرض کنیم β_n، n امین ریشهٔ مثبت معادلهٔ $\tan\mu=-\mu$ باشد، مقادیر ویژهٔ مسأله، $\lambda_n=\beta_n^2$ و نیز توابع ویژهٔ مسأله، $X_n(x)=\sin\beta_n x$ خواهند بود $(n=1,2,\dots)$. همچنین، بسط تابع f با ضابطهٔ $f(x)=1$ به صورت $1=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\beta_n x$ $(0<x<1)$ است که در آن

tel: (+98 21) 66005217
fax: (+98 21) 66005117
www.mathsci.sharif.ir
mathinfo@sharif.ir
تلفن ۶۶۰۰۵۲۱۷ (۰۲۱)
نمابر ۶۶۰۰۵۱۱۷ (۰۲۱)

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی
صندوق پستی ۹۴۱۵-۱۱۱۵۵ تهران
sharif university of technology
department of mathematical sciences
p o box 11155-9415, tehran, iran

۸۹/۱۰/۲۸

$$a_n=\int_0^1 \sin\beta_n x\,dx \Big/ \int_0^1 \sin^2\beta_n x\,dx$$

$$=\frac{4(1-\cos\beta_n)}{2\beta_n-\sin 2\beta_n};\quad n=1,2,\dots.$$

لذا

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(1-\cos\beta_n)}{2\beta_n-\sin 2\beta_n}\sin\beta_n x\quad (0<x<1).$$

$\blacksquare$

سؤال ۴: با فرض اینکه جواب به صورت $u(x,t)=X(x)T(t)$ باشد بدست می‌آوریم $XT'=X''T$ و لذا $\frac{X''}{X}=\frac{T'}{T}:=-\lambda$. در نتیجه با استفاده از شرایط مرزی، دستگاه

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0\\ X(0)=0\\ X(1)+X'(1)=0\end{cases}$$

را بدست می‌آوریم که بنابر مسأله قبل دارای مقادیر ویژه $\lambda_n=\beta_n^2$ و توابع ویژه $X_n(x)=\sin\beta_n x$ می‌باشد که در آن β_n، n امین ریشه مثبت معادله $\tan\mu=-\mu$ است $(n=1,2,\dots)$. هم‌چنین، به ازای $\lambda_n=\beta_n^2$ معادله $T'+\beta_n^2T=0$ بدست می‌آید که دارای جواب عمومی $T_n(t)=A_n e^{-\beta_n^2 t}$ است. لذا جواب صوری مسأله به صورت

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\beta_n x\, e^{-\beta_n^2 t}$$

است. اکنون شرط $u(x,0)=1$ بدست می‌دهد

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\beta_n x=1,$$

که مجدداً بنابر مسأله قبل خواهیم داشت

$$a_n=\frac{4(1-\cos\beta_n)}{2\beta_n-\sin 2\beta_n};\quad n=1,2,\dots.$$

پس جواب صوری مسأله عبارت است از

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(1-\cos\beta_n)}{2\beta_n-\sin 2\beta_n}\sin\beta_n x\, e^{-\beta_n^2 t}.$$

$\blacksquare$

سؤال ۵: با فرض اینکه جواب به صورت $u(x,y)=X(x)Y(y)$ باشد بدست می‌آوریم $X''Y+XY''=0$ و لذا $\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}:=-\lambda$. در نتیجه با استفاده از شرایط مرزی، دستگاه

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0\\ X(0)=0\\ X(\pi)=0\end{cases}$$

را بدست می‌آوریم که دارای مقادیر ویژه $\lambda_n=n^2$ و توابع ویژه $X_n(x)=\sin nx$ می‌باشد $(n=1,2,\dots)$. هم‌چنین، به ازای $\lambda_n=n^2$ معادله $Y''-n^2Y=0$ بدست می‌آید که دارای جواب عمومی $Y_n(y)=A_n e^{ny}+B_n e^{-ny}$ است. شرط کرانداری $u(x,y)$ وقتی $y\to\infty$ ایجاب می‌کند که $A_n=0$ و لذا $Y_n(y)=B e^{-ny}$. لذا جواب صوری مسأله به صورت

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx\, e^{-ny}$$

است. اکنون شرط $u(x,0)=\frac{\pi}{4}$ بدست می‌دهد

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx=\pi/4$$

و لذا

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin nx\,dx$$

$$=\frac{1-(-1)^n}{2n};\quad n=1,2,\dots.$$

پس جواب صوری مسأله عبارت است از

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x\, e^{-(2n-1)y}.$$

$\blacksquare$

tel: (+98 21) 66005217
fax: (+98 21) 66005117
www.mathsci.sharif.ir
mathinfo@sharif.ir
تلفن (۰۲۱) ۶۶۰۰۵۲۱۷
نمابر (۰۲۱) ۶۶۰۰۵۱۱۷